Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(53), 2009

УДК 512.542

Конечные группы с обобщенным условием покрытия и изолирования для подгрупп

В. А. Ковалева, А. Н. Скиба

Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Пусть A — подгруппа группы G, $K \leq H \leq G$. Тогда мы говорим, что A *покрывает* пару (K, H), если $AH = AK$; A *изолирует* пару (K, H), если $A \cap H = A \cap K$. Заметим, что $AH = AK$ эквивалентно $H \leq K(A \cap H)$, и $A \cap H = A \cap K$ эквивалентно $A \cap H \leq K$.

Будем говорить, что A *условно* покрывает пару (K, H), если найдется такой $h \in H$, что A покрывает пару (K^h, H); A *условно* изолирует пару (K, H), если найдется такой $h \in H$, что A изолирует пару (K^h, H).

Пара (K, H) такая, что $K \leq H \leq G$, называется *максимальной парой* в группе G, если K — максимальная подгруппа группы H.

Целью данной работы является изучение групп, выделенные системы подгрупп которых условно покрывают или изолируют максимальные пары этих групп.

Предварительные леммы. Следующие известные результаты будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1 [1, лемма 1.20]. *Если A и B — подгруппы группы G и $G = AB$, то $G = A^x B$ при любом $x \in G$.*

Класс групп $\mathcal{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathcal{F}$ также принадлежит $\mathcal{F}$;

2) из $H/A \in \mathcal{F}$, $H/B \in \mathcal{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathcal{F}$.

Формация называется *насыщенной*, если для нее из $G/N \in \mathcal{F}$ и $N \leq \Phi(G)$ всегда следует $G \in \mathcal{F}$.

Лемма 2.2 [3, с.39]. *Класс всех сверхразрешимых групп $\mathcal{U}$ является насыщенной формацией.*

Пусть $\mathcal{F}$ — непустая формация. Тогда через $G^{\mathcal{F}}$ обозначают и называют *$\mathcal{F}$-корадикалом группы G* пересечение всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых $G/M \in \mathcal{F}$. В частности, $G^{\mathcal{U}}$ — сверхразрешимый корадикал группы G.

Группа G называется минимальной несвехразрешимой группой, если G не сверхразрешима, но каждая собственная подгруппа группы G является сверхразрешимой.

Нам потребуется следующая лемма о минимальных несвехразрешимых группах.

Лемма 2.3 [3, глава VI, теорема 24.2]. *Пусть G — минимальная несвехразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G — разрешимая группа;

2) $G^{\mathcal{U}}$ является силовской p-подгруппой в G для некоторого простого числа p, делящего порядок группы G;

3) $G^{\mathcal{U}}/\Phi(G^{\mathcal{U}})$ — нециклический главный фактор группы G;

4) если $p > 2$, то $G^{\mathcal{U}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathcal{U}}$ не превышает 4.

Подгруппа H группы G называется *примитивной* [4] или *$\cap$-неразложимой* [5] в G, если H отлична от пересечения всех тех подгрупп из G, в которых она содержится собственно.

Лемма 2.4 [6, теорема 5.1]. *Пусть G — группа, N — нормальная подгруппа группы G. Тогда:*

(1) Если K — некоторая подгруппа группы G и E — $\cap$-неразложимая подгруппа группы K, то в G найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X, что $E = K \cap X$.

(2) Если H/N — $\cap$-неразложимая подгруппа группы G/N, то H — $\cap$-неразложимая подгруппа группы G.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.5. *Каждая максимальная подгруппа группы G $\cap$-неразложима.*

Группа G называется примитивной, если G имеет максимальную подгруппу M с единичным ядром $M_G = 1$.

Лемма 2.6 [2, A, Теорема 15.2]. *Если G — разрешимая примитивная группа, то $G = [N]M$, где $N = C_G(N)$ — минимальная нормальная подгруппа в G и M — такая максимальная в G подгруппа, что $M_G = 1$.*

Новые характеризации сверхразрешимых, p-сверхразрешимых и p-нильпотентных групп. Первая наша теорема дает характеризации сверзразрешимых групп по свойствам условного покрытия и изолирования выделенных систем подгрупп.

Теорема 3.1. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Группа G сверхразрешима.

(2) Каждая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G.

(3) Каждая $\cap$-неразложимая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G.

(4) Каждая циклическая подгруппа с простым порядком и порядком 4 группы G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Прежде предположим, что группа G является сверхразрешимой. Покажем, что любая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G.

Пусть (K, H) — произвольная максимальная пара группы G. Заметим, что если некоторая подгруппа A группы G условно покрывает или изолирует пару (K, H), то $A \cap H$ также условно покрывает или изолирует (K, H). Действительно, если A условно покрывает (K, H), то для некоторого $h \in H$ имеет место $H = K^h(A \cap H) = K^h((A \cap H) \cap H)$, т.е. $A \cap H$ условно покрывает (K, H). Если же A условно изолирует пару (K, H), то для некоторого $h \in H$ имеет место $A \cap H \leq K^h$ и, следовательно, $(A \cap H) \cap H \leq K^h$, т.е. $A \cap H$ условно изолирует (K, H). Таким образом, для доказательства утверждения (2) нам достаточно лишь рассмотреть случай, когда $H = G$ и K — максимальная подгруппа группы G.

Если $K_G = 1$, то группа G примитивна. Следовательно, так как группа G разрешима, то по лемме 2.6 в G имеется лишь единственная минимальная нормальная подгруппа N, $C_G(N) = N$ и $G = [N]K$. Поскольку группа G согласно условию (1) является сверхразрешимой, то $|N| = p$ — простое число и, следовательно, $K \simeq NK/N = G/N = G/C_G(N) \simeq L \simeq E \leq Aut(N)$, где $Aut(N)$ — циклическая группа порядка $p-1$. Значит, $|K|$ делит $p-1$ и, следовательно, p не делит $|K|$. Таким образом, K — p'-холлова подгруппа группы G.

Пусть A — произвольная подгруппа группы G. Если p делит $|A|$, то $|AK| = \frac{|A||K|}{|A \cap K|} = |K|\frac{|A|}{|A \cap K|} \geq |K|p = |G|$ и, следовательно, $AK = G$, т.е. A покрывает и, следовательно, условно покрывает пару (K, G). Если p не делит $|A|$, то, по теореме Холла [2, I, 3.3], найдется такой $g \in G$, что $A \leq K^g$, т.е. A условно изолирует пару (K, G).

Пусть теперь $K_G \neq 1$. Тогда по индукции заключаем, что подгруппа AK_G/K_G условно покрывает или изолирует пару $(K/K_G, G/K_G)$, т.е. найдется такой $gK_G \in G/K_G$, что A покрывает или изолирует пару $(K^{gK_G}/K_G, G/K_G)$. Если AK_G/K_G покрывает $(K^{gK_G}/K_G, G/K_G)$, т.е. $(AK_G/K_G)(K^{gK_G}/K_G) = G/K_G$, то $AK^{gK_G}/K_G = G/K_G$ и, следовательно, $AK^g = G$, т.е. A условно покрывает пару (K, G). Если же AK_G/K_G изолирует $(K^{gK_G}/K_G, G/K_G)$, т.е. $AK_G/K_G \leq K^{gK_G}/K_G$, то $A \leq K^g$, т.е. A условно изолирует пару (K, G). Таким образом, получаем, что любая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G.

Утверждения (2) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

Предположим теперь, что любая $\cap$-неразложимая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G. Покажем, что группа G сверхразрешима. Предположим, что это не так и пусть G — контрпример минимального порядка.

Покажем, что условие (3) переносится на подгруппы группы G. Пусть E — произвольная подгруппа группы G и V — некоторая ее $\cap$-неразложимая подгруппа. Тогда по лемме 2.4(1) в G найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X, что $V = E \cap X$. Пусть теперь (K, H) — произвольная максимальная пара в E. Тогда (K, H) — максимальная пара в G. Следовательно, по условию найдется такой $h \in H$, что X либо покрывает, либо изолирует пару (K^h, H). В первом случае мы имеем $XK^h = XH$ и поэтому $E \cap XK^h = K^h(E \cap X) = K^hV = E \cap XH = H(E \cap X) = HV$, т. е. V покрывает пару (K^h, H). Если же X изолирует пару (K^h, H), т.е. $X \cap H \leq K^h$, то $V \cap H = X \cap E \cap H = X \cap H \leq K^h$, следовательно, V изолирует пару (K^h, H). Итак, условие (3) переносится на подгруппы группы G. Следовательно, по выбору группы G заключаем, что все максимальные подгруппы группы G являются сверхразрашимыми. Таким образом, G — минимальная несверхразрешимая группа. Следовательно, группа G разрешима по лемме 2.3.

Покажем, что условие теоремы переносится на фактор-группы группы G. Пусть A/N — произвольная $\cap$-неразложимая подгруппа группы G/N и $(K/N, H/N)$ — произвольная максимальная пара в G/N. Тогда пара (K, H) является максимальной в группе G. Так как по лемме 2.4(2), A — $\cap$-неразложимая подгруппа в G, то по условию (3) подгруппа A условно покрывает или изолирует эту пару, т.е. найдется такой $h \in H$, что A покрывает или изолирует пару (K^h, H). Если A покрывает (K^h, H), т.е. $AK^h = AH$, то $(A/N)(H/N) = (AH)/N = (AK^h)/N = (A/N)(K^h/N) = (A/N)(K/N)^{hN}$, т.е. A/N покрывает $((K/N)^{hN}, H/N)$.

Если A изолирует (K^h, H), т.е. $A \cap K^h = A \cap H$, то $(A/N) \cap (H/N) = (A \cap H)/N = (A \cap K^h)/N = (A/N) \cap (K^h/N) = (A/N) \cap (K/N)^{hN}$, т.е. A/N изолирует пару $((K/N)^{hN}/N, H/N)$.

Итак, условие теоремы переносится на фактор-группы группы G и поэтому для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G/N сверхразрешима по выбору группы G. Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то G/N_1 и G/N_2 сверхразрешимы и поэтому $G \simeq G/N_1 \cap N_2$ сверхразрешима по лемме 2.3, что противоречит выбору группы G. Поэтому в G имеется лишь единственная минимальная нормальная подгруппа N. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $G/\Phi(G)$ сверхразрешима, и, следовательно, G также сверхразрешима по лемме 2.3. Значит, $\Phi(G) = 1$, т.е. $N \not\subseteq \Phi(G)$. Так как G разрешима, то N является абелевой p-группой для некоторого простого числа p. А так как $N \not\subseteq \Phi(G)$, то в G найдется такая максимальная подгруппа M, что $N \not\subseteq M$. Поэтому $G = NM$, $N \cap M = 1$. Если $|N| = p$ — простое число, то N — циклическая группа. Следовательно, из сверхразрешимости фактор-группы G/N следует, что G является сверхразрешимой группой. Но это противоречит выбору группы G. Значит, $|N| > p$.

Пусть M_p — силовская подгруппа группы M и V — максимальная подгруппа силовской p-подгруппы G_p группы G такие, что $M_p \leq V$. Так как, по лемме 2.5, V — $\cap$-неразложимая подгруппа группы G_p, то по лемме 2.4(1) заключаем, что в G найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X, для которой имеет место $V = X \cap G_p$. Тогда по условию (3), X условно покрывает или изолирует максимальную пару (M, G), т.е. найдется такой $x \in G$, что X покрывает или изолирует пару (M^x, G). Если X покрывает (M^x, G), то $XM^x = G$. Следовательно, по лемме 2.1, $XM = G$. Тогда $|G_p| = \frac{|X||M_p|}{|X \cap M_p|} = \frac{|X||M_p|}{|M_p|} = |X|$, откуда вытекает, что $X \cap V = G_p$. Но это противоречит тому, что V — максимальная подгруппа группы G_p. Поэтому заключаем, что X изолирует (M^x, G) и, следовательно, $X \leq M^x$. При этом, так как $|N| > p$, то $V \cap N \neq 1$, и поэтому $X \cap N \neq 1$. Следовательно, $M^x \cap N \neq 1$. Но это противоречит тому, что $M^x \cap N = M \cap N = 1$. Таким образом, получаем, что для всякого $x \in G$ подгруппа X одновременно не покрывает и не изолирует пару (M^x, G). Полученное противоречие завершает доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1).

Докажем теперь импликацию (4) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что это не так и пусть G — контрпример минимального порядка. Понятно, что условие (4) переносится на подгруппы группы G. Следовательно, G является минимальной несверхразрешимой группой и поэтому по лемме 2.3 справедливы следующие утверждения: (a) G — разрешимая группа; (b) $G^{\mathcal{U}}$ является силовской p-подгруппой в G для некоторого простого числа p, делящего порядок группы G; (c) $G^{\mathcal{U}}/\Phi(G^{\mathcal{U}})$ — нециклический главный фактор группы G; (d) если $p > 2$, то $G^{\mathcal{U}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathcal{U}}$ не превышает 4. Пусть $P = G^{\mathcal{U}}$ и $X/\Phi(P)$ — подгруппа порядка p в $P/\Phi(P)$, $x \in X \setminus \Phi(G)$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$ и поэтому по условию (4) подгруппа L условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару группы G. Поскольку $\mathcal{U}$ — насыщенная формация и $G/G^{\mathcal{U}}$ — сверхразрешимая группа, $P \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть M — такая максимальная в G подгруппа, что $PM = G$. Тогда L условно покрывает или изолирует каждую пару (M, G). Пусть элемент $h \in G$ таков, что L либо покрывает, либо изолирует пару (M^h, G). Поскольку группа G разрешима и, согласно [2, A, теорема 9.2(d)], $\Phi(P) \leq \Phi(G)$, то $G/\Phi(P) = [P/\Phi(P)](M^h/\Phi(P))$. Но $L \nsubseteq \Phi(P)$ и поэтому $L \nsubseteq M^h$. Следовательно, L не изолирует пару (M^h, G). Значит, LM^h=LM=G. Но тогда $|G : M| = |P/\Phi(P)| = p$ и поэтому фактор $P/\Phi(P)$ является циклическим, что противоречит утверждению (c). Полученное противоречие завершает доказательство импликации (4) $\Rightarrow$ (1).

Теорема доказана.

Группа называется *p-сверхразрешимой*, если все ее главные факторы, имеющие порядок, делящийся на p, являются циклическими.

Аналогично теореме 3.1 могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть G — группа, p — наименьший простой делитель порядка группы G. Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда любая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) группы G, что p делит $|H : K|$.*

Теорема 3.3. *Пусть G — p-разрешимая группа. Группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) группы G, что p делит $|H : K|$.*

Abstract. Finite groups with generalized condition of coverage and isolation for subgroups are considered in the paper. Let A be a subgroup of a group G, $K \leq H \leq G$. Then we say that *A conditionally covers (conditionally avoids) the pair* (K, H) if for some $h \in H$, $AH = AK$ (respectively $A \cap H = A \cap K$). The pair (K, H) is called a maximal pair of G if K is a maximal subgroup of H. Based on these concepts new characterizations of finite supersoluble groups are obtained.

Литература

1. Н.С. Черников, Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Наук. думка, Киев, 1987.

2. K. Doerk, T. Hawkes, Finite Soluble Groups. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

3. Л.А. Шеметков, Формации конечных групп. М: Наука, 1978. Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, Moscow, 1978.

4. D.L.Johnson, A note on supersoluble groups, Canadian J. Math. **23** (1971), 562–564.

5. M. Weinstein, etc, Between Nilpotent and Solvable. Polygonal Publishing House, Passaic N. J., 1982.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 23.01.09