Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

О максимальных подгруппах конечных групп

В. С. Монахов

Заметка содержит некоторые наблюдения автора, связанные с отсутствием в произвольных конечных группах максимальных подгрупп заданного индекса, и главных факторов заданного порядка.

Если H — подгруппа группы G и K — нормальная подгруппа в H, то фактор-группа H/K называется секцией группы G.

Будем использовать следующие обозначения:

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G;

Z_n — циклическая группа порядка N;

E_{p^n} — элементарная абелева группа порядка p^n;

A_n, S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n.

Лемма 1. *Если конечная группа G является прямым произведением простых неабелевых групп, то в G нет собственной подгруппы индекса ≤ 4.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что в простых неабелевых группах нет подгрупп индекса ≤ 4.

Лемма 2. *Если G — конечная группа, $F(G) = C_G(F(G))$ и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \simeq A_4$ или S_4.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Aut}F(G) \simeq GL(2,2) \simeq S_3$, то либо $G/F(G) \simeq Z_3$, либо $G/F(G) \simeq S_3$. Если $G/F(G) \simeq Z_3$, то $G \simeq A_4$. Если $G/F(G) \simeq S_3$, то $G \simeq S_4$.

Теорема 1. 1. *В группе G нечетного порядка нет максимальных подгрупп индекса p^2, где p — наименьший простой делитель порядка группы G.*

2. *Если у конечной группы G нет эпиморфных образов, изоморфных A_4 и S_4, то в G нет максимальных подгрупп индекса 4.*

Доказательство. Будем одновременно с помощью индукции по порядку группы доказывать оба утверждения. Пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда в группе G существует максимальная подгруппа M индекса p^2, где p — наименьший простой делитель порядка группы G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. По индукции в фактор-группе G/N нет максимальных подгрупп индекса p^2, поэтому подгруппа N не содержится в M и $G = MN$. Теперь $|G:M| = |N:N \cap M|$ и по лемме 1 подгруппа N разрешима. Поэтому $M \cap N = 1$, $|N| = p^2$. Пусть $C = C_G(N)$ — централизатор подгруппы N в группе G. Так как $N \subseteq C$, то $C = N(C \cap M)$ и $C \cap M$ — нормальная в G подгруппа. Поэтому $C \cap M = 1$. Теперь $N = C$ и подгруппа M изоморфна некоторой группе автоморфизмов группы N. Но

$$\mathrm{Aut}N = GL(2,p), \quad |GL(2,p)| = (p^2-1)(p^2-p) = p(p-1)^2(p+1),$$

поэтому $|M|$ делит число $p(p-1)^2(p+1)$.

Если G — группа нечетного порядка и p — наименьший простой делитель порядка G, то $p(p-1)^2(p+1)$ не делится на простые нечетные числа из $\pi(G)$, отличные от p, и M является p-подгруппой, что невозможно.

Если $p=2$, то по лемме 2 группа G изоморфна A_4 или S_4. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. 1. *Пусть группа G имеет нечетный порядок и p — наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда каждая подгруппа индекса p^2 субнормальна.*

2. *Если у конечной группы G нет эпиморфных образов, изоморфных A_4 и S_4, то в группе G каждая подгруппа индекса 4 субнормальна.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа индекса p^2 в случае (1) и индекса 4 в случае (2). По теореме 1 подгруппа H немаксимальна в группе G. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу H. Тогда $|G:M| = |M:H| = p$ и по теореме 1.62 [1] подгруппа H нормальна в M, подгруппа M нормальна в G, поэтому подгруппа H субнормальна в G.

ПРИМЕР 1. В диэдральной группе

$$D_{24} = \langle a, b \mid a^2 = b^{12} = 1, aba = b^{11} \rangle$$

порядка 24 подгруппа $H = \langle a \rangle \times \langle b^4 \rangle$ порядка 6 и индекса 4 субнормальна, но не нормальна.

Следствие 2. *Пусть в конечной группе G нет секций, изоморфных A_4, и p — наименьший простой делитель порядка G. Если силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p или p^2, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Вначале с помощью индукции по порядку группы проверим, что группа G разрешима. Ясно, что это надо сделать для случая $p = 2$. Условия следствия наследуются фактор-группами, поэтому в G нет разрешимых неединичных нормальных подгрупп. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Подгруппа N простая, и ее силовская 2-подгруппа имеет порядок 4 по условию следствия. По теореме 4.126 [4] подгруппа N изоморфна $PSL(2,q)$ для $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Но в этих группах всегда существует подгруппа A_4, противоречие. Следовательно, группа G разрешима.

Пусть теперь H — p'-холлова подгруппа группы G и M — максимальная подгруппа, содержащая H. Тогда $|G:M|$ делит p^2 и по теореме 1 $|G:M| = p$. По теореме 1.62 [1] подгруппа M нормальна в G. Если $M \neq H$, то $|M:H| = p$ и H нормальна в M опять по теореме 1.62 [1]. Но H — холлова подгруппа, поэтому H характеристическая в M и H нормальна в G. Следствие 1 доказано.

Следствие 3. *Пусть в конечной группе G нет секций, изоморфных A_4, и p — наименьший простой делитель порядка G. Если силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p или p^2, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Легко проверить, что для наименьшего простого делителя p порядка группы G условия p-сверхразрешимости и p-нильпотентности эквивалентны. Поэтому следствие 3 — эквивалентная формулировка следствия 2.

Лемма 3. 1. *Если p — наименьший простой делитель порядка группы G, то каждая нормальная подгруппа порядка p содержится в центре группы G.*

2. *Пусть G — группа нечетного порядка и p — наименьший простой делитель порядка группы G. Если N — нормальная подгруппа порядка p^2, то фактор-группа $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе из группы Z_p.*

3. *Если N — нормальная подгруппа порядка 4 группы G, то $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе из группы S_3.*

Доказательство. 1. Утверждение хорошо известно в теории конечных групп.

2. Пусть G — группа нечетного порядка, p — наименьший простой делитель порядка группы G, и N — нормальная подгруппа порядка p^2. Тогда фактор-группа $G/C_G(N)$ изоморфна некоторой группе автоморфизмов подгруппы N. Если $N \simeq Z_{p^2}$, то

по теореме 5.4.1 [3] $AutN$ — циклическая группа порядка $p(p-1)$ и $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе в Z_p. Если $N \simeq E_{p^2}$, то по теореме 2.50 [1] $AutN \simeq GL(2,p)$. Так как

$$|GL(2,p)| = (p^2-p)(p^2-1) = p(p-1)^2(p+1),$$

то $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе в Z_p, поскольку p — наименьший простой делитель порядка группы G.

3. Пусть N — нормальная подгруппа порядка 4 конечной группы G. Тогда фактор-группа $G/C_G(N)$ изоморфна некоторой группе автоморфизмов подгруппы N. Если $N \simeq E_4$, то по теореме 2.50 [1] $AutN \simeq GL(2,2) \simeq S_3$. Если $N \simeq Z_4$, то $AutN \simeq Z_2$. Итак, в любом случае $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе из группы S_3. Лемма 3 доказана.

Теорема 2. 1. *Пусть G — группа нечетного порядка и p — наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда группа G не имеет главных факторов порядка p^2.*

2. *Пусть в конечной группе G нет секций, изоморфных A_4. Тогда группа G не имеет главных факторов порядка 4.*

Доказательство. Предположим, что конечная группа G обладает главным фактором H/K порядка p^2. Тогда H/K является минимальной нормальной подгруппой группы G/K. Пусть G_pK/K — силовская p-подгруппа группы G/K, где G_p — силовская p-подгруппа из G. Ясно, что $H/K \subseteq G_pK/K$ и $H/K \cap Z(G_pK/K) = D/K \neq 1$.

1. Пусть G — группа нечетного порядка и p — наименьший простой делитель порядка группы G. По лемме 3 фактор-группа $G/K/C_{G/K}(H/K)$ имеет порядок p. Но теперь подгруппа D/K содержится в центре группы G/K, а это противоречит тому, что H/K является минимальной нормальной подгруппой группы G/K.

2. Пусть в конечной группе G нет секций, изоморфных A_4 и $p=2$. По лемме 3 фактор-группа $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе из группы S_3. Если $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе порядка 2 из группы S_3, то подгруппа D/K содержится в центре группы G/K, а это противоречит тому, что H/K является минимальной нормальной подгруппой группы G/K. Если $G/C_G(N)$ изоморфна подгруппе порядка 3 из группы S_3, либо $G/C_G(N)$ изоморфна группе S_3, то в группе G будет секция, изоморфная A_4, противоречие. Торема 2 доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф06МС-017).

Abstract. The paper considers the lack of maximal subgroups in finite groups.

Литература

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. 2006.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen, I. / B. Huppert // Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

3. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein // New York, 1968.

4. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн // М.: Мир, 1985.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.10.07