Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Критерий принадлежности конечных групп насыщенной формации

О. В. Нетбай, А. Н. Скиба

Все рассматриваемые нами группы конечны. Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется *перестановочной* [1] или *квазинормальной* [2] подгруппой в G.

Часто встречается такая ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого имеет место $AB^x = B^xA$. При анализе ситуаций подобного рода удобно пользоваться следующими определениями работы [3].

Определение 1. Пусть A, B — подгруппы группы G и X — непустая подгруппа из G. Тогда будем говорить, что:

(1) A — *X-перестановочна* с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$.

(2) A — *наследственно X-перестановочна* с B, если $AB^x = B^xA$, для некоторого $x \in X \cap < A, B >$.

Определение 2. Подгруппа A группы G называется *наследственно X-перестановочна* в G, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Значение понятия (наследственной) X-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-перестановочных подгрупп (см. обзор [4]). Целью данной работы является доказательство следующей теоремы в данном направлении.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, G — группа с нормальной подгруппой E нечетного порядка такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P группы E содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, наследственно G-перестановочны в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Лемма 1 [3, лемма 2.1]. *Пусть A, B, X — подгруппы группы G и $K \trianglelefteq G$. Тогда*

(1) Если A X-перестановочна с B, тогда B X-перестановочна с A.

(2) Если A X-перестановочна с B, тогда A^y X^y-перестановочна с B^y для всех $y \in G$.

(3) Если A (наследственно) X-перестановочна с B, тогда AK/K (наследственно) XK/K-перестановочна с BK/K в G/K.

(4) Пусть $K \leq A$. Тогда A/K (наследственно) XK/K-перестановочна с BK/K в G/K тогда и только тогда, когда A (наследственно) X-перестановочна с B в G.

(5) Если $A, B \leq M \leq G$ и A наследственно X-перестановочна с B, то A наследственно $(X \cap M)$-перестановочна с B.

(6) Если F — перестановочная подгруппа группы G и A (наследственно) X-перестановочна с B, то AF (наследственно) X-перестановочна с B.

Лемма 2 [5, теорема 24.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ является локальной формацией, G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$, тогда:*

(1) $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого простого p;

(2) $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором в G;

(3) если $p > 2$, то $G^{\mathfrak{F}}$ является группой экспоненты p; если $p = 2$, то экспонента $G^{\mathfrak{F}}$ не превышает 4;

(4) если $G^{\mathfrak{F}}$ — неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, содержащей все нильпотентные группы и G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $P = G^{\mathfrak{F}}$. Допустим, что каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая P, принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда P является p-группой для некоторого простого p. Кроме того, если каждая циклическая подгруппа из P простого порядка p или порядка 4 (если $p = 2$ и P — неабелева), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, является G-перестановочной в группе G, тогда $|P/\Phi(P)| = p$.*

Доказательство. По лемме 2, $P = G^{\mathcal{F}}$ является p-группой для некоторого простого p. Допустим, что каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка или порядка 4 (если $p = 2$ и P — неабелева), не имеющая сверхразрешимого добавления в группе G, является G-перестановочной в G. Пусть $\Phi = \Phi(P)$, Y/Φ — подгруппа простого порядка в P/Φ. Пусть $y \in Y \setminus \Phi$ и $L =< y >$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$ (если $p = 2$ и P — неабелева группа) и поэтому, по условию леммы, подгруппа L либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо является G-перестановочной в группе G. В первом случае мы можем считать, что $T \neq G$ и поэтому $T\Phi \neq G$, так как $\Phi \leq \Phi(G)$. С другой стороны, $LT = G$, и поэтому $(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(Y/\Phi) = G/\Phi$. Таким образом, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = \frac{|Y/\Phi||T\Phi/\Phi|}{|(Y/\Phi)\cap(T\Phi/\Phi)||T\Phi/\Phi|} = \frac{|Y/\Phi|}{|(Y/\Phi)\cap(T\Phi/\Phi)|} = \frac{p}{|(Y/\Phi)\cap(T\Phi/\Phi)|}$. Если $|(Y/\Phi)\cap(T\Phi/\Phi)| = p$, то $G/\Phi = T\Phi/\Phi$, что невозможно. Следовательно, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$. Так как P/Φ — главный фактор группы G, то P/Φ является минимальной нормальной подгруппой в G/Φ. Поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = \frac{|P/\Phi||T\Phi/\Phi|}{|(P/\Phi)\cap(T\Phi/\Phi)||T\Phi/\Phi|} = \frac{|P/\Phi|}{|(P/\Phi)\cap(T\Phi/\Phi)|}$. Покажем, что $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi) = \Phi/\Phi$. Допустим обратное, т.е. $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi) \neq \Phi/\Phi$. Ясно, что $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi)$— нормальная подгруппа в $T\Phi/\Phi$. А так как P/Φ является абелевой группой, то $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi)$ является нормальной подгруппой в G/Φ. Значит, либо $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi) = P/\Phi$, либо $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi) = \Phi/\Phi$. В первом случае имеем $(P/\Phi) \leq (T\Phi/\Phi)$, а значит $G/\Phi = T\Phi/\Phi$, что невозможно. Следовательно, $(P/\Phi) \cap (T\Phi/\Phi) = \Phi/\Phi$, и поэтому $|P/\Phi| = p$.

Допустим теперь, что L является G-перестановочной подгруппой в группе G. Тогда $L\Phi/\Phi = Y/\Phi$ является G/Φ-перестановочной подгруппой в G/Φ, по лемме 1(3). Так как P/Φ является G-главным фактором, то в группе G/Φ существует подгруппа M/Φ такая, что P/Φ не содержится в M/Φ. Следовательно, $G/\Phi = (P/\Phi)(M/\Phi)$, и поэтому $|G/\Phi : M/\Phi| = \frac{|P/\Phi||M/\Phi|}{|(P/\Phi)\cap(M/\Phi)||M/\Phi|} = \frac{|P/\Phi|}{|(P/\Phi)\cap(M/\Phi)|}$. Если $|(P/\Phi) \cap (M/\Phi)| \neq 1$, то $(P/\Phi)\cap(M/\Phi)$ является нормальной подгруппой в G/Φ. Поэтому $(P/\Phi)\cap(M/\Phi) = \Phi/\Phi$. Следовательно, $|G/\Phi : M/\Phi| = |P/\Phi|$. Так как $Y/\Phi \leq P/\Phi$ и Y/Φ является G/Φ-перестановочной в G/Φ, то найдется такой элемент $x\Phi \in G/\Phi$, что $(Y/\Phi)(M/\Phi)^{x\Phi} = (M/\Phi)^{x\Phi}(Y/\Phi)$. Покажем, что Y/Φ не содержится в $(M/\Phi)^{x\Phi}$. Так как $(M/\Phi)^{x\Phi} = M^x/\Phi$, то $(P/\Phi) \cap (M^x/\Phi) = \Phi/\Phi$, как показано выше. Это влечет, что Y/Φ не содержится в $(M/\Phi)^{x\Phi}$. Следовательно, $(Y/\Phi)(M/\Phi) = G/\Phi$, и поэтому $|G/\Phi : M/\Phi| = \frac{|Y/\Phi|}{|(Y/\Phi)\cap(M/\Phi)|} = p$. Отсюда следует, что $|P/\Phi| = p$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E — циклическая подгруппа, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда E — минимальная нормальная подгруппа в G. Ясно, что $E \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть M — такая максимальная подгруппа группы G, что $G = [E]M$ и $C = C_G(E)$. Тогда $M_G = C \cap M$, и поэтому $G/M_G = [EM_G/M_G](M/M_G)$ сверхразрешима, поскольку $M/M_G \simeq G/C$ — абелева группа. Следовательно, $G \simeq G/E \cap M_G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 5 [6, лемма 2.2]. *Пусть G — группа, p, q — различные простые делители порядка $|G|$, P — нециклическая силовская p-подгруппа группы G и Q — силовская q-подгруппа группы G. Если все максимальные подгруппы группы P (кроме, быть может, одной) имеют q-замкнутое добавление в G, то Q нормальна в G.*

Лемма 6 [7, теорема 1.6]. *Пусть p — нечетное простое число и F — поле характеристики p. Пусть G — вполне приводимая разрешимая линейная группа степени n над F. Допустим, что силовская p-подгруппа из G имеет порядок $p^{\lambda(n)}$. Тогда $\lambda(n) \leq n - 1$, причем равенство имеет место лишь в случаях $n = 1$ или $n = 2$ и $p = 3$.*

Доказательство теоремы.

(1) *Условие теоремы выполняется в любой холловой подгруппе X группы E (относительно X) и для каждой факторгруппы G/X (относительно E/X), где X — нормальная холлова подгруппа группы E.*

Пусть X — холлова подгруппа E, P — нециклическая силовская подгруппа в X. По условию, P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$, и каждая подгруппа H группы P с порядком $|H| = |D|$ наследственно G-перестановочна в G. Поэтому H является наследственно X-перестановочной в X, по лемме 1(5). Поэтому гипотеза выполняется для (X, X). Теперь пусть X нормальна в G. Тогда $(G/X)/(E/X) \simeq G/E \in \mathfrak{F}$. Пусть P^*/X является нециклической силовской p-подгруппой в G/X, где $p \mid |G/X|$, P — силовская p-погруппа из P^* такая, что $P^* = PX$. Тогда P является нециклической силовской погруппой в E, и поэтому, по условию теоремы, P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа V в P с порядком $|V| = |D|$ наследственно G-перестановочна в G. Пусть H^*/X — подгруппа в P^*/X с порядком $|H^*/X| = |D|$. Тогда $H^* = [X]H$, где H является силовской p-подгруппой в H^*. Ясно, что $|H| = |D|$ наследственно G/X-перестановочна в G/X, по лемме 1(3). Таким образом, гипотеза выполняется для G/X (относительно E/X).

(2) *Если X — неединичная нормальная холлова подгруппа группы E, то $X = E$.*

Так как X — характеристическая подгруппа группы E, то она нормальна в G, и поэтому ввиду (1), условие теоремы справедливо для G/X (относительно E/X). Значит, по выбору группы G и ее подгруппы E имеет место $G/X \in \mathfrak{F}$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G (относительно X), и поэтому $X = E$, по выбору пары (G, E).

(3) *Для наименьшего простого делителя p порядка группы E силовская p-подгруппа P группы E не является циклической.*

Действительно, если P — циклическая группа, то ввиду [8, глава IV, теорема 2.8], E — p-нильпотентная группа. Тогда из (2) следует, что $E = P$. Так как $G/E \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 4, имеем $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G.

Зафиксируем теперь некоторую силовскую p-подгруппу P группы E, где p — наименьший простой делитель $|E|$. Тогда ввиду (3), P — нециклическая группа и поэтому, по условию теоремы, P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, наследственно G-перестановочна в G.

(4) *Если $E = G$ или $E = P$, то $|D| > p$.*

Если $E = G$, то ввиду (2) группа G не p-нильпотентна и поэтому, согласно [8, глава IV, теорема 5.4], G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. Значит, если $|D| = p$, то, согласно лемме 3, имеет место $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что невозможно, поскольку p — наименьший простой делитель порядка группы G. Пусть теперь $E = P$, $L = G^{\mathfrak{F}}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Предположим, что $|D| = p$. Понятно, что $L \leq E$, и поэтому условие теоремы верно для G относительно L, что в силу выбора пары (G, E) влечет $L = E$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая E. Тогда $G/E \simeq M/M \cap E \in \mathfrak{F}$, и поэтому, ввиду леммы 3, имеет место $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 4, $G/\Phi \in \mathfrak{F}$. Но тогда $L \leq \Phi$, и поэтому $L = \Phi$, противоречие. Следовательно, $|D| > p$.

(5) *Для каждой абелевой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в $P \setminus \Phi(G)$, имеет место $|N| \leq |D|$.*

Предположим, что $|D| < |N|$. Согласно условию, каждая подгруппа H группы N порядка, равного порядку подгруппы D, наследственно G-перестановочна в G. Так как $N \not\subseteq \Phi(G)$, то существует максимальная подгруппа M такая, что $G = [N]M$. Тогда MH — подгруппа группы $MN = G$. Если $MH = M$, то H является подгруппой в M, что невозможно. Тогда $MH = G$. В этом случае, $N = N \cap MH = H(N \cap M) = H$, что противоречит выбору группы H. Следовательно, имеет место $|N| \leq |D|$.

(6) *Если $E = G$ или $E = P$ и N — минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в E, то условие теоремы справедливо для G/N (относительно E/N).*

Утверждение очевидно в каждом из случаев, когда либо $|N| < |D|$, либо $|P : D| = p$. Пусть $|P : D| > p$ и $|N| = |D|$. Тогда каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, наследственно G-перестановочна в G. Заметим также, что, согласно (4), имеет место $|D| > p$, и поэтому подгруппа N а, значит, и каждая подгруппа группы G, содержащая N, нециклична. Пусть $N \leq K \leq P$, где $|K : N| = p$. Поскольку K — нециклическая группа, то она имеет максимальную подгруппу $L \neq N$. Так как $|N| = |D| = |L|$, то подгруппа L наследственно G-перестановочна в G. Поэтому $K = LN$ наследственно G-перестановочна в G. Таким образом, условие теоремы справедливо для G/N, по лемме 1(4) и (4).

(7) *E — q-замкнутая группа, где q — наибольший простой делитель $|E|$.*

Согласно (1) и в силу выбора группы G нам лишь необходимо рассмотреть случай $E = G$. Кроме того, поскольку подгруппа E разрешима и по (1) условие теоремы справедливо для каждой холловой подгруппы X группы G (относительно X), то мы можем предполагать, что $|G| = p^a q^b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$. Допустим, что группа G не является q-замкнутой. Ввиду (6) и выбора группы G для каждой минимальной нормальной подгруппы N из G, содержащейся в P, факторгруппа G/N сверхразрешима. Следовательно, $N \not\subseteq \Phi(G)$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в P. Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно, пусть M — такая максимальная подгруппа группы G, что $G = [N]M$. Тогда $O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M)$. Поскольку $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$, то $O_p(G) \cap M$ нормальна в G и поэтому $O_p(G) \cap M = 1$. Значит, $N = O_p(G)$.

Пусть V — такая подгруппа из P с порядком $|V| = |D|$, что $P = VN$ и $M = VQ$, где Q — силовская q-подгруппа группы G. По условию, V наследственно G-перестановочна в G. Так как $G = PQ$ и $P = VN$, то $G = NVQ = NM$ и $M \cap N = 1$. В противном случае, $N \cap M$ является нормальной подгруппой в G, что противоречит минимальности подгруппы N. Значит, $G = [H]M$ и M является максимальной подгруппой в G. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из P, которая содержится в N и V_1 — максимальная подгруппа в V. Тогда $|LV_1| = |V|$, и поэтому, согласно условию, LV_1 является наследственно G-перестановочной подгруппой в G. Значит, $LV_1M = LM$ является подгруппой в G. Так как M — максимальная подгруппа в G и $L \cap M \leq N \cap M = 1$.

то $LV_1M = LM = G$. Следовательно, $|G : M| = |L| = p = |N|$, что невозможно ввиду леммы 4. Поэтому $P \neq VN$ для всех подгрупп V из P с порядком $|V| = |D|$. По условию теоремы, V является наследственно G-перестановочной подгруппой в G. Покажем, что $V \leq M$. Действительно, пусть M_p — силовская p-подгруппа группы M. По лемме 6, $|M_p| < |N|$. Ввиду (5), $|N| \leq |D|$. Тогда $|M_p| < |D|$. Пусть теперь H — такая подгруппа из P с порядком $|H| = |D|$, что $|M_p| < |H|$. В этом случае $P = M_pN = HN$, что противоречит нашему допущению. Таким образом, мы имеем (7).

(8) $E = P$.

Действительно, пусть q — наибольший простой делитель порядка $|E|$ и Q — силовская q-подгруппа группы E. Тогда ввиду (7), Q нормальна в E и поэтому согласно (2), $Q = E = P$.

Заключительное противоречие.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Тогда ввиду (6) и (8), N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P, и поэтому $N = O_p(G) = P = E$. Пусть M — такая максимальная подгруппа в G, что $G = [N]M$. Тогда $|G : M| = |N|$. Пусть V — подгруппа из P с порядком $|V| = |D|$. По условию подгруппа V наследственно G-перестановочна в G. Так как M — максимальная подгруппа в G и $V \cap M \leq P \cap M = N \cap M = 1$, то $VM = G$ и $|G : M| = |V| < |P| = |N|$, что противоречит (5). Теорема доказана.

Abstract. Let G be a finite group, H be a subgroup of G. Let A and B be subgroups of G. Then we say following [3] that A is heredirarly G-permutes with B if $AB^x = B^xA$ for some $x \in < A, B >$. We fix in every non-cyclic Sylow subgroup P of G some its subgroup D satisfying $1 < |D| < |P|$ and study the structure of G under assumption that all subgroups H with $|H| = |D|$ are heredirarly G-permutable in G.

Литература

1. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. —1972. —Vol. 125. —P. 1–16.

2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. —1939. —Vol. 5. —P. 431–460.

3. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. —2003. —№ 4(19). —С. 37–39.

4. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. —2006. —№. 3(36). —С. 12–31.

5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А.Шеметков; М.: Наука, 1978.

6. Скиба, А.Н. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / А.Н. Скиба; Гомель, 2005. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; декабрь).

7. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein; Passaic N. J.: Polygonal Publishing House, 1982.

8. Huppert B. Endliche Gruppen I / B. Huppert; Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.02.08