УДК 535.417.01

ВЛИЯНИЕ КВАНТОВАНИЯ ФУНКЦИИ ПРОПУСКАНИЯ ГОЛОГРАММЫ НА КАЧЕСТВО ВОССТАНОВЛЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В. И. Мандросов

В работе исследуется шум квантования, возникающий при аппроксимации голограммы ступенчатой функцией. Показано, что величина этого шума пропорциональна высоте ступеньки квантования.

Для различных приложений голографии, в частности при цифровой обработке голографической информации, часто возникает задача аппроксимации функции пропускания простейшими функциями. Обычно подобная аппроксимация ограничивается подбором специальных импульсных функций, принимающих всего два значения (бинарное квантование) [1].

В данном сообщении функция пропускания аппроксимируется ступенчатой функцией. Целью сообщения является исследование влияния подобного квантования на качество восстановленного изображения. В качестве объекта для голографирования выбран протяженный объект, расположенный на достаточно гладкой кривой.

В этих предположениях функция пропускания может быть представлена в виде

$$T(x) = \left(\frac{A_1 l_1}{R_1}\right)^2 + \frac{A_1 l_1}{R_1 r_1} \int_{-S}^{S} E_1(\sigma) \cos\left[\psi_1(\sigma) + u_1 x^2 + v_1 x\right] d\sigma, \qquad (1)$$

где A_1, l_1 — амплитуда и размер опорного источника, R_1, Φ_1 — координаты источника опорного сигнала, r_1, φ_1 — координаты точки на объекте, x — координата точки на голограмме, $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ — волновое число опорного источника, $E_1(\sigma) \exp i\psi_1(\sigma)$ — амплитудно-фазовое распределение на объекте, длина которого составляет $2S$,

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \left(-\frac{\cos^2 \varphi_1}{r_1} + \frac{\cos^2 \Phi_1}{R_1}\right) k_1, \\ v_1 &= (\sin \varphi_1 - \sin \Phi_1)\, k_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В результате аппроксимации функции $T(x)$ ступенчатой функцией получим новую функцию пропускания

$$T_\Delta(x) = \Delta\,[T(x)/\Delta],$$

где $\Delta \leqslant Max\ T(x)$ — величина ступеньки квантования, знак $[a]$ означает целую часть числа a.

Используя равенство

$$z - [z] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n z}{n}$$

и подставляя в это равенство $z = T(x)/\Delta$, получим

$$T_\Delta(x) = T(x) + \Delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n T(x)}{\Delta}\right)}{\pi n}. \tag{3}$$

В процессе восстановления изображения возникает дифракционное поле, формирующее это изображение, которое во френелевском приближении представлено в виде [2, 3]

$$E(r_2, \varphi_2) = \int_{-L}^{L} T_\Delta(x) \exp i\,(u_2 x^2 + v_2 x)\,dx,$$

где

$$v_2 = k_2(-\sin\Phi_2 + \sin\varphi_2), \quad u_2 = k_2\left(\frac{\cos^2\Phi_2}{R_2} - \frac{\cos^2\varphi_2}{r_2}\right),$$

а R_2, Φ_2 — координаты реконструирующего источника; r_2, φ_2 — координаты точки наблюдения; $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ — волновое число реконструирующего источника. Подставляя вместо $T_\Delta(x)$ выражение (3), получим

$$E(r_2, \varphi_2) = \int_{-L}^{L} T(x) \exp i\,(u_2 x_2^2 + v^2 x)\,dx +$$

$$+ \Delta \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n T(x)}{\Delta}\right)}{\pi n} \exp i\,(u_2 x^2 + v_2 x)\,dx, \tag{4}$$

где $2L$ — размер голограммы.

Если n велико, а Δ мало, то к интегралам, стоящим под знаком суммы, можно применить метод стационарной фазы. Применяя этот метод, нетрудно показать, что

$$\int_{-L}^{L} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n T(x)}{\Delta}\right)}{\pi n} \exp(i u_2 x^2 + i v_2 x)\,dx \simeq$$

$$\simeq \sum_m \frac{\sin\left(\frac{2\pi n T(x_m)}{\Delta}\right)}{\sqrt{\frac{2\pi n T''_{xx}(x_m)}{\Delta}}} \exp i\,(u_2 x_m^2 + v_2 x_m), \tag{5}$$

где x_m — экстремальные точки функции пропускания, определяемые из уравнения

$$T'_x = \frac{\partial T(x)}{\partial x} = 0.$$

Суммирование проводится по всем экстремальным точкам.

Подставляя выражение (5) в равенство (6), получим окончательно дифракционное поле, формирующее изображение протяженного объекта

$$E = E^+ + E^- + \frac{A_1^2 l_1^2}{R_1^2 \sqrt{u_2}} \left\{ F\left(L\sqrt{u_2} + \frac{v_2}{2\sqrt{u_2}}\right) - F\left(-L\sqrt{u_2} + \frac{v_2}{2\sqrt{u_2}}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\Delta\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_m \frac{\sin\left(\frac{2\pi n T(x_m)}{\Delta}\right) \exp i\,(u_2 x_m^2 + v_2 x_m)}{\sqrt{\frac{2\pi n}{\Delta} T''_{xx}(x_m)}}. \tag{6}$$

Здесь

$$E^\pm = \int_{-L}^{L} \int_{-S}^{S} E_1(\sigma) \exp i\,(\pm\psi_1(\sigma) + u^\pm x^2 + v^\pm x)\,dx\,d\sigma.$$

Индекс (+) относится к мнимому изображению, индекс (—) относится к действительному изображению.

$$u^{\pm}=u_1+u_2^{\pm};\quad v^{\pm}=\pm v_1+v_2^{\pm},$$

где

$$u_2^{\pm}=-\frac{k_2}{2}\left(\frac{\cos^2\Phi_2}{R_2}\mp\frac{\cos^2\varphi_2}{r_2}\right),\quad v_2^{\pm}=k_2(\pm\sin\varphi_2-\sin\Phi_2),$$

$F(t)=\int\limits_0^t \exp ix^2dx$ — интеграл Френеля.

Третье слагаемое в выражении (6) представляет собой фон, возникающий за счет опорного сигнала.

Четвертое слагаемое представляет собой быстро сходящийся ряд (сходимость пропорциональна $\sim(\Delta/n)^{3/2}$).

Общий вклад этого ряда в изображение нетрудно оценить на примере фраунгоферовской голограммы точечного объекта. В этом случае $u_1=u_2^{\pm}=0$ и

$$T(x)\simeq 2E_0A_1\cos v_1x+A_1^2\ (A_1\gg E_0),$$

$$T''_{xx}(x_m)=v_1^2A_1E_0,\quad T(x_m)=\frac{2\pi n(-1)^m E_0^2}{\Delta},$$

E_0 — амплитуда точечного объекта.

Тогда четвертое слагаемое представимо в виде

$$E_4=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{n}\right)^{3/2}\sum_{m=1}^{m=m_0}\frac{\sin\left(\frac{2\pi n(-1)^m E_0^2}{\Delta}\right)\exp\frac{iv_2m\pi}{v_1}}{v_1\sqrt{A_1E_0}},$$

где $m_0=\left[\frac{Lv_1}{\pi}\right]$.

Заменяя $\sin\left(\frac{2\pi n(-1)^m E_0^2}{\Delta}\right)$ на единицу, получим

$$E_4\simeq\frac{\sqrt{2}\,\Delta^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi v_1}\exp\frac{\pi v_2 i}{2v_1}\,\frac{\sin\left(\left[\frac{Lv_1}{\pi}\right]\frac{v}{2v_1}\right)}{\sin\frac{\pi v_2}{2v_1}},$$

где $\zeta(3/2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^{3/2}\approx 2.1$ — дзета-функция Римана.

Учитывая, что, как правило, $L\gg\pi/v_1$, можно заменить $[Lv_1/\pi]$ на Lv_1/π и получить следующую оценку:

$$|E_4|\approx\frac{\Delta^{3/2}2.1\sqrt{2}\sin\left(\frac{Lv_2}{\pi}\right)}{\pi(A_1E_0)^{1/2}}\leqslant 2Lc\left(\frac{\Delta}{E_0A_1}\right)^{1/2}\Delta.$$

Учитывая далее, что

$$|E_{\max}^{\pm}|\leqslant 2LcE_0A_1,$$

где c — коэффициент пропорциональности, получим отношение мощности шума, возникающего вследствие квантования к мощности полезного сигнала

$$\eta=\left|\frac{E_4}{E_{\max}^{\pm}}\right|^2\approx\left(\frac{\Delta}{E_0A_1}\right)^3.$$

Можно показать, что и в случае протяженных объектов

$$\eta=\left(\frac{\Delta}{A_1E_{\max}}\right)^3,$$

где $E_{\max}$ — максимальная амплитуда поля на объекте.

Таким образом, наличие квантования приводит к появлению добавочного фона, пропорционального Δ^3, где Δ — величина ступеньки квантования.

При больших ступеньках квантования приходим к различным вариантам бинарного квантования, которые подробно рассмотрены во многих работах ([1]).

Литература

[1] A. W. Lohmann, D. P. Paris. Appl. Opt., *5*, 1739, 1967.
[2] I. A. Armstrong. IBM J. Res and Dev., *9*, 171, 1965.
[3] E. B. Champagne. J. Opt. Soc. Am., *57*, 51, 1967.

Поступило в Редакцию 18 декабря 1970 г.
