Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(56), 2009

УДК 517.9

Построение возмущений периодических дифференциальных систем, не изменяющих отображений А. Пуанкаре

В. И. Мироненко

Реальные системы, испытывающие внешние периодические воздействия, описываются периодическими дифференциальными уравнениями. Решения этих уравнений, как правило, нельзя записать в элементарных функциях. В связи с этим свойства решений этих уравнений следует исследовать непосредственно по самому уравнению. Основными из этих свойств являются наличие периодических решений и их устойчивость. Для исследования этих свойств А.Пуанкаре ввел так называемое отображение Пуанкаре (отображение за период) [1, с. 209] и [2, с. 194].

Пусть мы рассматриваем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in R, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Если $X(t,x)$ есть 2ω-периодическая по t функция, а $\varphi(t;t_0,x_0)$ есть общее решение системы (1), то отображение Пуанкаре есть отображение $x \mapsto \varphi(t_0+2\omega;t_0,x)$. Здесь t_0 может быть любым числом, но обычно считают $t_0=0$. Знание отображения Пуанкаре позволяет полностью решить задачу о существовании периодических решений системы (1) и их устойчивости.

К сожалению, для построения отображения Пуанкаре по его определению необходимо знание общего решения $\varphi(t;t_0,x_0)$ системы (1), что, как правило, недоступно. Нам удалось в некоторых случаях обойти эту трудность. С этой целью мы, отказываясь от традиции, положив $t_0=-\omega$. Тогда отображение Пуанкаре задается формулой $\Pi(x) := \varphi(\omega;-\omega,x)$. Конечно же, сдвиг во времени не облегчает задачу. Этот сдвиг, однако, наводит на мысль о полезности рассмотрения функции

$$F(t,x) := \varphi(-t;t,x), \tag{2}$$

которая была названа нами [3] отражающей функцией (ОФ). Зная ОФ мы можем найти отображение Пуанкаре $\Pi(x)$ (отображение за период $[-\omega;\omega]$) по формуле $\Pi(x) = F(-\omega;x)$.

ОФ также определяется через общее решение $\varphi(t;t_0,x_0)$ системы (1). Поэтому создается впечатление, что таким образом мы не получим ничего нового. Для нее, однако, верна

Теорема 1 [3, 5] *Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением следующей задачи Коши*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x. \tag{3}$$

Соотношение (3), названное основным соотношением для ОФ, позволяет во многих случаях найти ОФ системы (1) даже тогда, когда эта система не интегрируется в элементарных функциях или квадратурах. Так, например, если $X(t,x)$ нечетна по t, то, в чем нетрудно убедиться проверкой соотношения (3), ОФ системы (1) $F(t,x) \equiv x$. Это значит, что отображение за период $[-\omega;\omega]$ такой системы задается простой формулой $\Pi(x) \equiv x$.

Используя теорему 1, было получено много конкретных результатов (см. [4-5]). Следует заметить, что само уравнение (3) является сложным объектом для исследования. Работа с этим объектом, однако, показала, что разные системы вида (1) могут иметь одну и ту же

ОФ, так, например, как следует из предыдущего абзаца, ОФ всех систем с нечетной по t правой частью задается формулой $F(t,x) \equiv x$. Было доказано [4-5], что все системы, имеющие $F(t,x)$ в качестве своей ОФ, и только такие системы имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R(-t,F), \tag{4}$$

где R есть произвольная вектор-функция, для которой система (4) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. При этом дифференцируемая функция $F(t,x)$ является ОФ некоторой системы тогда и только тогда, когда

$$F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x.$$

Системы, имеющие одну и ту же ОФ, названы эквивалентными [4]. Все системы, эквивалентные системе (1), и только такие системы записываются в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R(-t,F). \tag{5}$$

Таким образом, возмущения $P(t,x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R(-t,F)$ системы (1) при любой непрерывно дифференцируемой вектор-функции $R(t,x)$ не меняет ОФ этой системы. Это значит, что мы можем строить системы эквивалентные данной, если только знаем ОФ данной системы. Следующая теорема 2 позволяет нам строить системы, эквивалентные системе (1) и в том случае, когда ОФ системы (1) нам неизвестна.

Теорема 2 [6]. *Пусть вектор-функции* $\Delta_i(t,x)$, $i = \overline{1;r}$, *являются решениями системы*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta = 0. \tag{6}$$

Тогда система

$$\frac{dx}{\partial t} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(t)\Delta_i(t,x) \tag{7}$$

при любых нечетных скалярных непрерывных $\alpha_i(t)$ *имеет такую же ОФ как и система (1).*

В системе (7) r может быть равно и бесконечности. Тогда соответствующий ряд в (7) считается сходящимся к непрерывно дифференцируемой по x функции.

В последнее время была доказана теорема, обратная к теореме 2, и приведены примеры ее применения [7]. Следует, однако, подчеркнуть, что решение системы (6) за редким исключением является достаточно трудным делом. Поэтому встает вопрос о выделении тех случаев, в которых нам удается найти хотя бы некоторые из решений системы (7).

В работах Бельского В. были найдены некоторые из таких случаев для полиномиальных уравнений (1). При этом искались только полиномиальные по x решения уравнения (6).

Здесь мы укажем на новые возможности построения систем, эквивалентных данной системе (1).

Теорема 3. *Пусть не зависящая от* t *вектор-функция* $A(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} A = 0, \tag{8}$$

тогда система

$$\frac{dx}{dt} = (1 + \alpha(t))X(t,x) + \alpha(t)A(x) \tag{9}$$

при любой нечетной непрерывной скалярной функции $\alpha(t)$ *имеет такую же ОФ как и система (1). При этом если* $\alpha(t)$ *и* $X(t,x)$ $2\omega-$*периодичны по* t, *то отображения Пуанкаре (отображения за период* $[-\omega;\omega]$*) этих двух систем совпадают в их общей области определения.*

Доказательство. В качестве Δ возьмем функцию $\Delta(t,x):=X(t,x)+A(x)$. Тогда, используя (8), получим

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X-\frac{\partial X}{\partial x}\Delta\equiv\frac{\partial X}{\partial t}+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}\right)X-\frac{\partial X}{\partial x}(X+A)\equiv\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}X-\frac{\partial X}{\partial x}A\equiv 0.$$

Поэтому согласно теореме 2 заключение теоремы 3 верно.

Доказанная теорема важна потому, что в том случае, когда $X(t,x)$ действительно зависит от t (т.е. когда $\frac{\partial X}{\partial t}\neq 0$) соотношение (8) дает реальную возможность нахождения вектор-функции $A(x)$. Приведем на этот случай

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=a(x)\cos t+b(x)\sin t,$$

в котором $a(x)$ и $b(x)$ дифференцируемые функции. Определим для этих функций функцию $A(x):=\frac{a^2+b^2}{a'b-ab'}$, где $a'=a'(x)$ и $b'=b'(x)$ есть производные функций $a(x)$ и $b(x)$. Тогда если выполнено тождество $A'a-Aa+b\equiv 0$, то рассматриваемое уравнение эквивалентно уравнению $\frac{dx}{dt}=(a(x)\cos t+b(x)\sin t)(1+\alpha(t))+\alpha(t)A(x)$, в котором $\alpha(t)$ произвольная непрерывная нечетная функция.

В рассмотренном примере полученное уравнение эквивалентное исходному, формально имеет более сложный вид. Это, однако, не означает, что оно более сложно и для исследования. Мы должны учесть, что $\alpha(t)$ есть произвольная функция, находящаяся в нашем распоряжении. Полезной также оказывается

Теорема 4. *Пусть для системы (1) удается найти непрерывную нечетную скалярную функцию $\alpha(t)$ и не зависящую от t дифференцируемую функцию $A(x)$, для которых*

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X}{\partial x}(t,x)A(x)+\frac{\partial X}{\partial t}(t,x)\equiv\frac{\alpha'(t)}{1+\alpha(t)}(X(t,x)+A(x)).$$

Тогда система (1) имеет такую же ОФ как и система

$$\frac{dx}{dt}=\frac{X(t,x)-\alpha(t)A(x)}{1+\alpha(t)}.$$

Для доказательства следует положить $\Delta:=\frac{X(t,x)+A(x)}{1+\alpha(t)}$ и $\mathrm{Y}(t,x):=\frac{X(t,x)-\alpha(t)A(x)}{1+\alpha(t)}$.

Проверка показывает, что справедливо тождество $\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}\mathrm{Y}-\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x}\Delta\equiv 0$. Поэтому согласно теореме 3 система $\frac{dx}{dt}=\mathrm{Y}(t,x)$ имеет такую же ОФ, как и система

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{Y}(t,x)(1+\alpha(t))+\alpha(t)\Delta(t,x)\equiv X(t,x).$$

Откуда и следует утверждение теоремы 4.

Пример 2. Простыми вычислениями можно убедиться в том, что для уравнения $\frac{dx}{dt}=2\sin t-\sin x+\cos(t+x)+\sin(x+2t)$ функции $A(x)\equiv 1$ и $\alpha(t)=2\sin t$ удовлетворяют всем условиям теоремы 4. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет такую же ОФ, как и уравнение $\frac{dx}{dt}=\mathrm{Y}(t,x)$, где

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(t,x) &= \frac{X-\alpha A}{1+\alpha} = \frac{-\sin x+\cos(t+x)+\sin(x+2t)}{1+2\sin t} = \\
&= \frac{\cos(t+x)+\cos x\sin 2t+\sin x\cos 2t-\sin x}{1+2\sin t} = \\
&= \frac{\cos(t+x)+2\cos x\cos t\sin t-2\sin x\sin^2 t}{1+2\sin t} = \cos(t+x).
\end{aligned}
$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет такую же ОФ, как и интегрируемое в элементарных функциях уравнение $\frac{dx}{dt}=\cos(t+x)$.

Abstract. The paper presents the ways of constructing differential systems having the same reflecting function as the given system. Such systems have similar mapping of shift on the symmetrical gap $[-\omega;\omega]$.

Литература

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: Наука. – 272с.

2. Chillingworth, D. Differential topology with a view to applications / London, Pitman Publishing, 1976. – 291pp.

3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем /В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т.XX, № 9. – С.1635-1638.

4. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И.Мироненко. – Минск: изд-во «Университетское», 1986. – 76с.

5. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И.Мироненко. – Мин образов. РБ, УО «ГГУ им.Ф.Скорины». – Гомель, 2004. – 196с.

6. Мироненко, В.В. Возмущения нелинейных дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т.40, № 10. – С.1325-1332.

7. Мироненко, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре /В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т.44, № 10. – С.1347-1352.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 28.03.09