Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(50), Ч1, 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

Стационарное распределение сетей с групповым поступлением положительных и отрицательных заявок и ограниченным групповым обслуживанием

Ю. С. БОЯРОВИЧ

1. Введение. В последнее время исследование сетей с групповыми перемещениями заявок привлекает к себе все большее внимание, однако рассмотрение таких сетей связано с определенными трудностями вследствие чрезмерно связного графа переходов между состояниями марковского процесса. Рассматриваемая сеть является некоторой модификацией сети, описанной в [1]. Модель представляет собой открытую сеть массового обслуживания с групповым поступлением положительных и отрицательных заявок и групповым ограниченным обслуживанием.

Модель сети.

2.1 Описание модели. Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = 1...N$, на которые поступают независимые потоки групп положительных и отрицательных заявок с интенсивностями λ_i и λ_i^- для узла $i \in J$ соответственно. Кроме того, когда система пуста, на нее поступает дополнительны пуассоновский поток групп с интенсивностью λ_i*, $i \in J$. Обслуживание групп в узлах экспоненциальное с параметром μ_i, $i \in J$. На обслуживание выбирается группа заявок, причем размеры требуемых на обслуживание групп будем считать ограниченными величиной M_i, $i \in J$. Процессы поступления и обслуживания независимы.

Размеры поступающих положительных, отрицательных, дополнительных групп и групп, требуемых для обслуживания Y_i, Y_i^-, Y_i*, Z_i, взаимно независимые и неотрицательные целочисленные случайные величины с произвольными функциями распределения A_i, A_i^-, A_i*, B_i (с конечными средними $m_{A_i}, m_{A_i^-}, m_{A_i*}$, функциями вероятностных масс a_i, a_i^-, a_i* и b_i и производящими функциями $\tilde{A}_i, \tilde{A}_i^-, \tilde{A}_i*$ и $\tilde{B}_i$ соответственно. Обслуженная в узле $i \in J$ группа, достигшая требуемого размера *k*, переходит в узел *j* с вероятностью $p_{(i,k)(j,m)}$ как группа положительных, а с вероятностью $p^-_{(i,k)(j,m)}$ как группа отрицательных заявок размера *m*. С вероятностью $p_{(i,k)0}$ группа покидает сеть. Неполные группы, не достигшие требуемого размера, также обслуживаются, но после обслуживания покидают сеть. Процессы поступления и обслуживания независимы. Состояние сети описывается цепью Маркова $\{X(t) = (X_1(t),..., X_N(t))\}$, где $X_i(t)$ – число заявок в узле $i \in J$ в момент *t*.

Пусть $c_{i,j}(k,m) = b_i(k)\, p_{(i,k)(j,m)}$, $c^-_{i,j}(k,m) = b_i(k)\, p^-_{(i,k)(j,m)}$, $c_{i,0}(k,m) = b_i(k)\, p_{(i,k),0}$, если $i, j \in J$. Для простоты предполагаем, что $c_{i,i}(k,m) = 0$ для всех $i \in J$, $k, m \geq 1$ и что цепь неприводима.

Обозначим через *q* функцию интенсивностей перехода для прямого и через q^R для обращенного во времени процессов. Для рассмотренной сети они следующие:

$$q(n, n - ke_i + me_j) = \mu_i c_{i,j}(k,m) I_{k \leq M}, \quad (n \geq 1),$$

$$q(n,n-ke_i)=\left(\mu_i c_{i,0}(k)I_{k\le M}+\lambda_i^- a^-(k)+\bar{B}_i(n_i+1)I_{\{n_i\}}(k)I_{k\le M}+\bar{A}_i(n_i+1)I_{\{n_i\}}(k)\right),\ (n\ge k\ge 1),$$

$$q(n,n+me_j)=\lambda_j a_j(m)+\lambda_j{}^* a_j{}^*(m)I_{\{0\}}(n_j),\ (k\ge 1), \tag{2.1}$$

где $\bar{B}_i(n)=1-b(1)-...-b(n-1)$, I_A – индикаторная функция множества A.

Для обращенного процесса:

$$q(n,n+ke_i-me_j)=\tilde{n}_i^k c_j^{-k}\mu_i c_{i,j}(k,m)I_{k\le M},\quad (n\ge 1),$$

$$q(n,n+ke_i)=c_i^k\left(\mu_i c_{i,0}(k)I_{k\le M}+\lambda_i^- a^-(k)+\bar{B}_i(n_i+1)I_{\{n_i\}}(k)I_{k\le M}+\bar{A}_i(n_i+1)I_{\{n_i\}}(k)\right),\ (n\ge k\ge 1),$$

$$q(n,n-me_j)=c_j^{-m}(\lambda_j a_j(m)+\lambda_j{}^* a_j{}^*(m)I_{\{0\}}(n_j)),\ (k\ge 1), \tag{2.2}$$

Для исследования сети были введены в рассмотрение общие интенсивности поступления ординарных групп положительных и отрицательных заявок размера m в узел j – $\gamma_j(m)$ и $\gamma_j^-(m)$ соответственно.

А также функции $\tilde{\Gamma}_i(z_i)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_i(m)z_i^m$ и $\tilde{\Gamma}_i^-(z_i)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_i^-(m)z_i^m$. При этом $\tilde{\Gamma}_i(1)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_i(m)$ и $\tilde{\Gamma}_i^-(1)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_i^-(m)$ являются интенсивностями потока основных групп положительных и отрицательных заявок на узел i соответственно.

2.2 Основной результат. Применение при исследовании сети метода обращения времени позволило получить следующие результаты:

Лемма 2.1. При выполнении условия эргодичности

$$\tilde{\Gamma}_j^{/}(1) < \mu_j\, m_{B_j}+\Gamma_j^-(1)\, m_{A_j^-},\quad j\in J, \tag{2.3}$$

для существования геометрического распределения необходимо и достаточно, чтобы при всех $j\in J$ для некоторого $c_j\in(0,1)$ выполнялись неравенства:

$$c_j\left[\mu_j\frac{1-\tilde{B}(c_j)}{1-c_j}+\Gamma_j^-(1)\frac{1-\tilde{A}_j^-(c_j)}{1-c_j}\right]=\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j{}^*,\quad j\in J \tag{2.4}$$

и

$$\tilde{\Gamma}_j(z_i)+\lambda_j{}^*\tilde{A}_j{}^*(z)(1-c_j z_j)=z_j[\tilde{\Gamma}_j(1)+(1-c_j)\lambda_j{}^*],\ j\in J \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. Для того, чтобы при всех $j\in J$ уравнения (2.4) имели корни $c_j\in(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j{}^* < \mu_j\, m_{B_j}+\Gamma_j^-(1)\, m_{A_j^-},\ j\in J. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. Для того, чтобы $\{\pi(n)=\prod\limits_{j\in J}(1-c_j)c_j^n,\ n\in Z_+^N\}$ являлось стационарным распределением *X(t)*, необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности , неравенств (2.6) и

$$[\tilde{\Gamma}_j^{/}(1)+\lambda_j{}^*(1-c_j)]\,c_j^{k-1}\ge\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_j(k-s)c_j^s,\ k=2,3,\ldots;\ j\in J, \tag{2.7}$$

где $c_j = c_j(\lambda_j{}^*)$ – корни уравнений (2.4), принадлежащие (0,1). При фиксированных $\lambda_j{}^*$ эти корни существуют, единственны и удовлетворяют неравенствам (2.6).

При выполнении условий теоремы параметры дополнительного потока могут быть найдены из соотношений

$$\lambda_j{}^* a_j{}^*(k) = [\tilde{\Gamma}_j^{/}(1)+\lambda_j{}^*(1-c_j)]\,c_j^{k-1}-\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_j(k-s)c_j^s\quad k=2,3,\ldots;\ j\in J, \tag{2.8}$$

Причем в условиях теоремы 2.1 сеть квазиобратима по отношению к соответствующему набору интенсивностей ([2]).

3. Характеризация стационарного распределения. Таким образом, установлен следующий алгоритм поиска стационарного распределения:

1. Ищем корни $c_j = c_j(\gamma_j, \gamma_j^-)$ уравнений

$$c_j\left[\mu_j \frac{1-\tilde{B}(c_j)}{1-c_j} + \gamma_j^- \frac{1-\tilde{A}_j^-(c_j)}{1-c_j}\right] = \gamma_j + \lambda_j *, \quad j \in J \tag{3.1}$$

для $\gamma_j + \lambda_j * < \mu_j m_{B_j} + \gamma_j^- m_{A_j^-}$, $j \in J$, при выполнении противоположного неравенства полагаем $c_j(\gamma_j, \gamma_j^-)=1$.

2. Решаем систему нелинейных уравнений трафика относительно $\{\gamma_j, \gamma_j^-\}$, $j \in J$.

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i\in J}\mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i, \gamma_i^-) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m),\ j \in J. \tag{3.2}$$

$$\gamma_j^- = \lambda_j^- + \sum_{i\in J}\mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i, \gamma_i^-) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}^-(k,m),\ j \in J. \tag{3.2*}$$

3. Подставляя найденные γ_j и γ_j^- в $c_j(\gamma_j, \gamma_j^-)$, находим c_j, $j \in J$. Предполагая выполненным $\gamma_j + \lambda_j * < \mu_j m_{B_j} + \gamma_j^- m_{A_j^-}$, $j \in J$, находим $\tilde{\Gamma}_j(1)$ и $\tilde{\Gamma}_j^-(1)$.

4. Проверяем выполнение (2.6). Если хотя бы одно из них нарушено, то не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения.

5. Подсчитываем $c_{i,j}(k,m) = b_i(k) p_{(i,k)(j,m)}$ и $c^-_{i,j}(k,m) = b_i(k) p^-_{(i,k)(j,m)}$, а затем $\gamma_j(m)$ и $\gamma_j^-(m)$ по формулам:

$$\gamma_j(m) = \lambda_j a_j(m) + \sum_{j\in J}\mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}(k,m);$$

$$\gamma_j^-(m) = \lambda_j^- a_j^-(m) + \sum_{j\in J}\mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}^-(k,m), j \in J;$$

Ищем $\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m) z_i^m$ и $\tilde{\Gamma}_i^-(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i^-(m) z_i^m$ и производные этих функций в единице.

6. Проверяем выполнение условия эргодичности (2.3). Если они нарушены, то не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения.

7. Проверяем выполнение неравенств (2.7). Если они нарушены, то не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения.

8. Подсчитываем параметры дополнительного потока по формуле (2.8). Решая систему неравенств (2.3), (2.6), (2.7) относительно $\lambda_j *$, находим область значений интенсивностей дополнительных потоков на узлы сети, когда они пусты.

9. Записываем искомое решение для стационарного распределения

$$\{\pi(n) = \prod_{j\in J}(1-c_j)c_j^{n_j},\ n \in Z_+^N\}$$

Для решения системы нелинейных уравнений трафика применяется итерационная процедура, описанная в [1], которая, как было показано, сходится к решению системы.

5. Заключение. Исследована работа открытой сети массового обслуживания с групповым поступлением положительных и отрицательных заявок и ассамблейно-трансферным групповым обслуживанием. Установлены необходимые и достаточные условия геометрической мультипликативности стационарного распределения. Показана эквивалентность результатов для рассмотренной модели и модели, описанной в [1]. Также приводится итерационная процедура для решения системы нелинейных уравнений трафика, сходящаяся к ее решению.

Abstract. The paper presents the investigation of the work of open queuing networks with batch arrival of positive and negative queries and limited batch service. The criterion of the existence of

stationary distribution in the form of the product of geometrical distributions for the given network is established.

Литература

1. Malinkovsky, Y. Geometric product form stationary distribution for queuing networks with batch movements of positive and negative customers / Y. Malinkovsky, J. Bojarovich // Proceedings of the International Conference "Mathematical Methods for Increasing Efficiency of Information Telecommunication Networks", 2007. – P. 128–133.

2. Miyazawa, M. A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers / M. Miyazawa, P.G. Taylor // Adv. Appl. Prob., 1997. – V. 29. – No 2. – P. 523–534.

3. Gelenbe, E. G-networks with Signals and Batch Removal / E. Gelenbe // Prob. Eng. Inf. Sci., 1993. – V.7. – P. 335–342.

4. Gelenbe, E. Product Form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Probab., 1991. – V. 28. – P. 656–663.

5. Gelenbe, E. G-networks with Triggered Customer Movement / E. Gelenbe // J. Appl. Prob., 1993. – V. 30. – P. 742–748.

Гомельский государственный
университет имени Ф.Скорины

Поступило 30.04.08