Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(50), Ч1, 2008

УДК 519.2

Открытые неоднородные сети с бесконечнолинейными узлами и многорежимными стратегиями обслуживания

Ю. Е. Летунович

Введение. В настоящей работе рассматриваются открытые сети массового обслуживания с несколькими типами заявок. Входящий в сеть поток заявок – простейший. Сеть состоит из *N* бесконечнолинейных узлов, поэтому поступающие в узел заявки мгновенно становятся на обслуживание, не накапливаясь. Каждый из обслуживающих приборов может работать в нескольких режимах. Переключение с режима на режим не изменяет числа заявок в узле.

Устанавливается стационарное распределение вероятностей состояний сети в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы. Важным для исследования сети является нахождение условий обратимости и условий эргодичности.

Постановка задачи. В сеть, состоящую из *N* бесконечнолинейных узлов, поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в *i*-й узел и становится заявкой *u*-го типа с вероятностью $p_{0(i,u)}$ ($\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p_{o(i,u)} = 1$). Заявки могут быть *M* типов. После обслуживания в *i*-м узле заявка *u*-го типа независимо от других заявок мгновенно направляется в *j*-й узел и становится заявкой *v*-го типа с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть ($\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p_{(i,u)(j,v)} + p_{(i,u)0} = 1;\ i, j = \overline{1,N};\ u, v = \overline{1,M}$).

Узлы имеют бесконечное число каналов обслуживания. Нумеруются только занятые приборы. Нумерация переменная следующего вида. Если требование поступает в свободный узел, то занимаемому им прибору присваивается номер 1. Если во время обслуживания этой заявки поступает следующее требование, то оно занимает свободный прибор и ему с вероятностью ½ присваивается номер 1 (тогда прибор с номером 1 будет иметь номер 2) или с той же вероятностью – номер 2. Если очередное поступающее требование застаёт занятыми k приборов, то оно занимает свободный прибор, который с вероятностью *1/(k+1)* получает номер *s* ($s = \overline{1,k+1}$). При этом для приборов с номерами *1,2,…,s-1* их номера сохраняются, а для приборов с номерами *s,…,k* величина номера увеличивается на 1. Если заканчивается обслуживание на приборе с номером s, то приборы с номерами *1,2,…,s-1* сохраняют свои номера, а номера последующих приборов *s+1,s+2,…* уменьшаются на 1 [1].

В каждом из *N* узлов находится единственный прибор, который может работать в $r_i+1,\ i=\overline{1,N}$, режимах. Состояние сети в момент времени *t* будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t),\dots,x_N(t))$, где $x_i(t) = (\overline{x_i}(t), l_i(t)) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t),\dots,x_{i,n(i)}(t), l_i(t))$ описывает состояние *i*-го узла в момент времени *t.* Здесь $x_{i1}(t)$ – тип заявки, которая обслуживается в момент времени *t* первым прибором,…, $x_{i,n(i)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании прибором с номером *n(i)* в момент времени *t, n(i)* – число заявок в *i*-ом узле, $l_i(t)$ – режим, в котором работает *i*-й узел в момент времени *t.* $x(t)$ является однородным марковским процессом с пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, где $X_i = \{(0,l_i),(x_{i1},l_i),(x_{i1},x_{i2},l_i),(x_{i1},x_{i2},x_{i3},l_i),\dots:\ x_{ik} = \overline{1,M},\ k = 1,2,\dots;l_i = \overline{0,r_i}\}$.

Длительность обслуживания прибором *i*-го узла, находящегося в состоянии x_i, имеет показательное распределение с параметром $\mu_{i,u}$. Назовём *0* основным режимом работы. Время пребывания в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $\nu_i(\overline{x_i},0)$, после чего прибор переходит в режим *1*. Для состояний x_i, у которых $1 \le l \le r_i - 1$, время пребывания в режиме *l* также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_i(x_i)$ прибор *i*-го узла переходит в *l-1* режим, а с интенсивностью $\nu_i(x_i)$ – в *l+1* режим. Время пребывания в последнем r_i-м режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_i(\overline{x_i},r_i)$, после чего прибор переходит в ($r_i - 1$)-й режим. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

Будем предполагать, что матрица $(p_{(i,u)(j,v)} : i,j = \overline{0,N}; u,v = \overline{1,M})$, где $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима, тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{iu} = p_{0(i,u)} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(i,u)}, i = \overline{1,N}; u = \overline{1,M}, \tag{1}$$

имеет единственное решение (ε_{iu}), для которого $\varepsilon_{iu} > 0$ $(i = \overline{1,N}; u = \overline{1,M})$.

Формулировка результата. Для сокращения выкладок введём следующие операторы: $T^{+}_{u,k}, T^{-}_{k}, R^{l+1}, R^{l-1} : X_i \to X_i$, положив

$$T^{+}_{u,k}(0,l) = (u,l),$$

при $x_i \ne 0$

$$T^{+}_{u,k}(x_i) = T^{+}_{u,k}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l) = (x_{i1},...,x_{i,k-1},u,x_{i,k},...,x_{i,n(i)},l),\ k = \overline{1,n(i)+1};$$

$$T^{-}_{k}(x_{i1},l) = (0,l),$$

при $|x_i| = n(i) > 1$

$$T^{-}_{k}(x_i) = T^{-}_{k}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l) = (x_{i1},...,x_{i,k-1},x_{i,k+1},...,x_{i,n(i)},l), k = \overline{1,n(i)};$$

$$R^{l+1}(x_i) = R^{l+1}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l) = (x_{i1},...,x_{i,n(i)},l+1),$$

$$R^{l-1}(x_i) = R^{l-1}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l) = (x_{i1},...,x_{i,n(i)},l-1),$$

$T^{-}_{k}(x_i)$ не определён при $x_i = (0,l)$, $R^{l+1}(x_i)$ не определён при $x_i = (\overline{x_i},r_i)$, $R^{l-1}(x_i)$ – при $x_i = (\overline{x_i},0)$. Рассмотрим также операторы, описывающие изменение состояния сети: $T^{+}_{(i,u),k}, T^{-}_{i,k}, R^{l+1}_{i}, R^{l-1}_{i} : X \to X$, положив

$$T^{+}_{(i,u),k}(x) = T^{+}_{(i,u),k}(x_1,x_2,...,x_N) = \bar{\bar{x}} = \left(\bar{\bar{x}}_1,\bar{\bar{x}}_2,...,\bar{\bar{x}}_N\right),$$

где $\bar{\bar{x}}_i = T^{+}_{u,k}(x_i)$, $\bar{\bar{x}}_k = x_k$ при $k \ne i$,

$$T^{-}_{i,k}(x) = T^{-}_{i.k}(x_1,x_2,...,x_N) = \bar{\bar{x}} = \left(\bar{\bar{x}}_1,\bar{\bar{x}}_2,...,\bar{\bar{x}}_N\right),$$

где $\bar{\bar{x}}_i = T^{-}_{k}(x_i)$, $\bar{\bar{x}}_k = x_k$ при $k \ne i$,

$$R^{l+1}_{i}(x) = R^{l+1}_{i}(x_1,x_2,...,x_N) = \bar{\bar{x}} = \left(\bar{\bar{x}}_1,\bar{\bar{x}}_2,...,\bar{\bar{x}}_N\right),$$

где $\bar{\bar{x}}_i = R^{l+1}(x_i)$, $\bar{\bar{x}}_k = x_k$ при $k \ne i$,

$$R^{l-1}_{i}(x) = R^{l-1}_{i}(x_1,x_2,...,x_N) = \bar{\bar{x}} = \left(\bar{\bar{x}}_1,\bar{\bar{x}}_2,...,\bar{\bar{x}}_N\right),$$

где $\bar{\bar{x}}_i = R^{l-1}(x_i)$, $\bar{\bar{x}}_k = x_k$ при $k \ne i$.

Кроме этого, введём оператор $S_i : X \to X_i$, положив

$$S_i(x) = S_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x_i = (\overline{x_i}, l).$$

Для исследуемой сети массового обслуживания условия обратимости принимают вид [2]:

$$\lambda \varepsilon_{i,x_{ik}} p_i\left(T_k^-(x_i)\right)\frac{1}{k} = p_i(x_i)\mu_{i,x_{ik}};$$

$$\varphi_i\left(\overline{x_i}, l_i\right) p_i\left(\overline{x_i}, l_i\right) = \nu_i\left(\overline{x_i}, l_i - 1\right) p_i\left(\overline{x_i}, l_i - 1\right).$$

Если стационарное распределение существует, то стационарные вероятности удовлетворяют уравнению глобального равновесия:

$$p(x)\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\left[\lambda p_{o(i,u)} + \mu_{i,u} + \nu_i(x_i) + \varphi_i(x_i)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n(i)} p\left(T_{i,k}^-(x)\right)\lambda p_{o(i,x_{ik})}\frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{k=1}^{n(i)+1} p\left(T_{(i,u),k}^+(x)\right)\mu_{i,u}\, p_{(i,u)o} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n(i)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\sum_{m=1}^{n(j)+1} p\left(T_{(j,v),m}^+\left(T_{i,k}^-(x)\right)\right)\mu_{j,v}\, p_{(j,v)(i,x_{ik})}\frac{1}{k} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\left[p\left(R_i^{l-1}(x)\right)\nu_i\left(R_i^{l-1}(x)\right) + p\left(R_i^{l+1}(x)\right)\varphi_i\left(R_i^{l+1}(x)\right)\right].$$

Лемма. Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий

$$\varphi_i\left(\overline{x_i}, l_i + 1\right)\nu_i\left(T_{u,k}^+\left(\overline{x_i}, l_i\right)\right) = \varphi_i\left(T_{u,k}^+\left(\overline{x_i}, l_i + 1\right)\right)\nu_i\left(\overline{x_i}, l_i\right), \tag{2}$$

$u = \overline{1, M}, k = \overline{1, n(i)+1}, l_i = \overline{0, r_i - 1}.$

Для эргодичности марковского процесса *x(t)*, описывающего поведение сети, достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{x\in X} q_x \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{n(i)!}\lambda^{n(i)}\prod_{s=1}^{n(i)}\varepsilon_{i,x_{is}}\,\mu_{i,x_{is}}^{-1}\prod_{k=1}^{l_i}\nu_i(0, k-1)\varphi_i^{-1}(0,k)\right], \tag{3}$$

где $q_x = \lambda + \sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{i,u} + \sum_{i=1}^{N}[\nu_i(x_i) + \varphi_i(x_i)]$, $\varepsilon_{i,x_{is}}$ – решения уравнения трафика (1).

Теорема. Пусть в узлах сети выполнено условие (2) и условие эргодичности (3), тогда стационарное распределение вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания с несколькими типами заявок и многорежимными стратегиями обслуживания имеет вид $p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N)$, где $p_i(x_i)$ определяется по формуле

$$p_i(x_i) = \frac{1}{n(i)!}\frac{\lambda^{n(i)}\prod_{s=1}^{n(i)}\varepsilon_{i,x_{is}}\prod_{k=1}^{l_i}\nu_i(0,k-1)}{\prod_{s=1}^{n(i)}\mu_{i,x_{is}}\prod_{k=1}^{l_i}\varphi_i(0,k)}\, p_i(0),$$

$\varepsilon_{i,x_{is}}$ – решения уравнения трафика (1), а

$$p_i(0)=\left[\sum_{x_i\in X_i}\frac{1}{n(i)!}\frac{\lambda^{n(i)}\prod_{s=1}^{n(i)}\varepsilon_{i,x_{is}}\prod_{k=1}^{l_i}\nu_i(0,k-1)}{\prod_{s=1}^{n(i)}\mu_{i,x_{is}}\prod_{k=1}^{l_i}\varphi_i(0,k)}\right]^{-1},\ i=\overline{1,N}.$$

Заключение. Исследована работа открытой неоднородной сети массового обслуживания с бесконечнолинейными узлами и многорежимными стратегиями обслуживания. Установлены условия эргодичности процесса состояний сети, необходимые и достаточные условия обратимости изолированного узла. При выполнении во всех узлах последних условий найдено стационарное распределение вероятностей состояний сети в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы.

Abstract. The paper considers an open network with Poisson input, exponential service and several types of queries. Every node contains infinite number of servers which can operate in several modes. Switch occurs only between the neighboring regimes. The reversibility and ergodic conditions are established and the stationary network state distribution is determined in the product form.

Литература

1. Крыленко, А.В. Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками. Модели с несколькими типами заявок / А.В. Крыленко, Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – №2. – 1998. – С. 106–110.

2. Малинковский, Ю.В. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Весці НАН Беларусі. – №3. – 2001. – С. 129–134.

Гомельский государственный
университет имени Ф.Скорины

Поступило 30.04.08