Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(50), Ч1, 2008

УДК 512.567.5

Последовательности симметрий и совмещение произвольных элементов n-арных групп

Ю. И. Кулаженко

Впервые элементы аффинной геометрии на тернарной группе построил Д. Вакарелов в [1]. В [2] С.А.Русаков с помощью введенных на n-арной группе ($n \geq 2$) понятий параллелограмма, симметричности точек и вектора определил n-арную rs-группу и доказал ее существование. В [3] этот вопрос нашел свое дальнейшее развитие: построено аффинное пространство $W(G)$ методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой n-арной rs-группы G и доказано изоморфное вложение всякой абелевой n-арной rs-группы G в абелеву n-арную группу, построенную на $W(G)$.

В работах [4–6] решены задачи связанные с самосовмещением произвольных элементов n-арных групп, а именно, разработаны различные методы построения последовательностей симметрий произвольной точки $p \in X$ относительно других точек из X, в результате которых точка p отображается в себя. Естественно возник вопрос о возможности построения последовательности симметрий произвольной точки $p \in X$ относительно других точек из X такой, что результатом этой последовательности будет произвольная, но фиксированная точка $l \in X$, в общем случае отличная от p.

В представленной работе предлагаются различные методы решения поставленной задачи. В частности, построены последовательности симметрий произвольной точки $p \in X$ относительно элементов последовательности вершин параллелограмма и специально построенных шестиугольников n-арной группы G, в результате которых $p \in X$ отображается в произвольную, но фиксированную точку $l \in X$.

В работе рассматривается n-арная группа $G = \langle X, (\ ), ^{[-2]} \rangle$. Элементы этой группы мы называем точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]} \overset{2n-4}{b} a)$$

называют точкой симметричной точке $b \in X$ относительно точки $a \in X$. Последовательность k элементов из X — k-угольником G.

Определение. Будем говорить, что произвольная точка $p \in X$ совмещается с произвольной точкой $l \in X$, если точка l является результатом последовательности симметрий точки p относительно других точек из X.

Другие обозначения, определения и результаты, используемые в работе, можно найти в [3–7].

Теорема 1. *Пусть G — полуабелева n-арная группа, $a, b, c, d, p, l \in X$. Произвольная точка p совмещается с произвольной точкой l в результате последовательности симметрий точки p относительно элементов последовательности трех вершин параллелограмма, если любая четвертая вершина параллелограмма является серединой отрезка $[pl]$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, вершина d параллелограмма $\langle a, b, c, d \rangle$ — середина отрезка $[pl]$.

Докажем, что справедливо равенство

$$S_c(S_b(S_a(p))) = l. \qquad (1)$$

Поскольку d — середина отрезка $[pl]$, то

$$l = S_d(p).$$

Тогда равенство (1) имеет вид

$$S_c(S_b(S_a(p))) = S_d(p). \tag{2}$$

Рассмотрим левую часть равенства (2) с учетом определения симметричности точек, равенства 3.28 из [7], предложения 1 из [8] и определения 2 из [2].

Имеем

$$\begin{gathered}
S_c(S_b(S_a(p))) = S_c(S_b(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)) = \\
= S_c(b(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)}_{2n-4}b) = \\
= S_c(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = \\
= (c(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}c) = \\
= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = ((cb^{[-2]}\overset{2n}{b}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ab^{[-2]}\overset{2n-1}{b}c)) = \\
= (dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d) = S_d(p).
\end{gathered}$$

Равенство (2) установлено, а значит справедливо (1). Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G — полуабелева n-арная группа. a, b, c, d, p, l — произвольные точки из X. Точка p совмещается с точкой l в результате последовательности симметрий точки p относительно элементов последовательности пяти вершин шестиугольника*

$$\langle a, b, c, d, (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b), a\rangle,$$

если любая шестая вершина шестиугольника является серединой отрезка $[pl]$.

Доказательство. Предположим, что вершина c шестиугольника

$$\langle a, b, c, d, (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b), a\rangle$$

— середина отрезка $[pl]$.

Установим справедливость равенства

$$S_b(S_a(S_a(S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(p))))) = l. \tag{3}$$

Поскольку, по предположению, точка c — середина отрезка $[pl]$, то справедливо равенство

$$l = S_c(p).$$

В этом случае мы должны доказать, что

$$S_b(S_a(S_a(S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(p))))) = S_c(p). \tag{4}$$

Рассмотрим левую часть равенства (4) с учетом полуабелевости группы G, определения 4 из [3], равенства 3.28 из [7] и предложения 1 из [8]. Имеем

$$S_b(S_a(S_a(S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(p))))) = S_b(S_a(S_a(S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)))) =$$

$$= S_b(S_a(S_a((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)^{[-2]}\underbrace{(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)\ldots(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}_{2n-4}))) =$$

$$= S_b(S_a(S_a((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)d^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b))) =$$

$$= S_b(S_a(S_a(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) =$$

$$= S_b(S_a(a(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]}\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots a}_{2n-4})) =$$

$$= S_b(S_a(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)) =$$

$$= S_b(a\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)^{[-2]}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)\ldots}_{2n-4}a) =$$

$$= S_b(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}a) = S_b(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$

$$= (b(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c})^{[-2]}\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}b) =$$

$$= (bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}b) = (cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c) = S_c(p).$$

Мы установим справедливость равенства (4), а значит и справедливость равенства (3).

Аналогично доказывается справедливость теоремы в случаях, когда серединой отрезка $[pl]$ является любая другая вершина шестиугольника

$$\langle a, b, c, d, (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b), a\rangle.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если G — полуабелева n-арная группа, a, b, c — произвольные точки из X, то произвольная точка $p \in X$ совмещается с произвольной точкой $l \in X$ в результате последовательности симметрий точки p относительно элементов последовательности пяти вершин шестиугольника*

$$\langle S_b(a), S_c(a), S_c(b), S_a(b), S_a(c), S_b(c)\rangle \tag{5}$$

в случае, когда любая шестая вершина этого шестиугольника является серединой отрезка $[pl]$.

Доказательство. Предположим что, вершина $S_a(b)$ шестиугольника (5) — середина отрезка $[pl]$.

Докажем справедливость равенства

$$S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(p))))) = l. \tag{6}$$

Из того, что $S_a(b)$ — середина отрезка $[pl]$ следует, что точка p симметрична точке l относительно точки $S_a(b)$, а значит справедливо равенство

$$S_{S_a(b)}(p) = l. \tag{7}$$

Рассмотрим левую часть равенства (6) с учетом свойства полуабелевости группы G, определения 4 из [4] симметричности точек, равенства 3.28 из [7], предложения 1 из [8].

Поскольку

$$S_{S_a(c)}(p) = (S_a(c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_a(c)) = ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) =$$
$$= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a),$$

то

$$S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(p)) = S_{S_b(c)}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) =$$
$$= (S_b(c)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}S_b(c)) =$$
$$= ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)).$$

Тогда

$$S_{S_b(a)}(S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(p))) =$$
$$= S_{S_b(a)}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= (S_b(a)(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}S_b(a)) =$$
$$= ((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}$$
$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)) = (ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a),$$

а значит

$$S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(p)))) = S_{S_c(a)}(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) =$$
$$= (S_c(a)(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}S_c(a)) =$$
$$= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)).$$

Откуда

$$S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(p))))) =$$
$$= S_{S_c(b)}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c) =$$
$$= (S_c(b)(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots}_{2n-4}S_c(b)) =$$
$$= ((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)) =$$
$$= (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a) = ((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)) =$$
$$= (S_a(b)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_a(b)) = S_{S_a(b)}(p).$$

Мы показали, что левая часть равенства (6) равна $S_{S_a(b)}(p)$. Откуда и с учетом равенства (7) следует справедливость равенства (6).

Аналогично доказывается справедливость теоремы в случаях, когда серединой отрезка $[pl]$ является любая другая вершина шестиугольника (5).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если G — полуабелева n-арная группа, a, b, c — произвольные точки из X, то произвольная точка $p \in X$ совмещается с произвольной точкой $l \in X$ в результате последовательности симметрий точки p относительно элементов последовательности пяти вершин шестиугольника*

$$\langle a, c, b, S_b(S_c(a)), (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} S_b(S_c(a))), S_a(S_c(b))\rangle \tag{8}$$

в случае, когда любая шестая вершина этого шестиугольника является серединой отрезка $[pl]$.

Доказательство. Пусть серединой отрезка $[pl]$, для определенности, будет вершина $S_a(S_c(b))$ шестиугольника (8).

Докажем, что точка $l \in X$ является, в этом случае результатом последовательности симметрий точки $p \in X$ относительно последовательности точек

$$a, c, b, S_b(S_c(a)), (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} S_b(S_c(a)))$$

— остальных вершин шестиугольника (8).

Т.е. установим справедливость равенства

$$S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} S_b(S_c(a)))}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p))))) = l. \tag{9}$$

Рассмотрим левую часть равенства (9) с учетом полуабелевости группы G, определения симметричности точек 4 из [3], равенства 3.28 из [7], предложения 1 из [8]

Поскольку

$$\begin{gathered}
S_b(S_c(S_a(p))) = S_b(S_c(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p} a)) = \\
= S_b(c(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p} a)^{[-2]} \underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p} a) \ldots}_{2n-4} c) = S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c) = \\
= (b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c)^{[-2]} \underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c) \ldots}_{2n-4} b) = \\
= (bca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} p^{[-2]}\overset{2n-4}{p} ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} b),
\end{gathered}$$

а

$$\begin{gathered}
S_b(S_c(a)) = S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c) = \\
= (b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c)^{[-2]} \underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c) \ldots}_{2n-4} b) = (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c} ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} b),
\end{gathered}$$

то

$$S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p))) =$$
$$= S_{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) =$$
$$= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b).$$

Тогда

$$S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a)))}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p))))) =$$
$$= S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a)))}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c))(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]}\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}$$
$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c))) =$$
$$= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots}_{2n-4}b))b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}$$
$$\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots b)}_{2n-4})) =$$
$$= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= ((a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) =$$
$$= ((a(S_c(b))^{[-2]}\underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(a(S_c(b))^{[-2]}\underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4}a)) =$$
$$= (S_a(S_c(b))p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_a(S_c(b))) = S_{S_a(S_c(b))}(p). \qquad (10)$$

Поскольку, по предположению, точка $S_a(S_c(b))$ является серединой отрезка $[pl]$, то точка p симметрична точке l относительно $S_a(S_c(b))$, а значит справедливо равенство

$$S_{S_a(S_c(b))}(p) = l. \qquad (11)$$

С учетом равенств (11) и (10) делаем вывод о справедливости равенства (9).

Аналогично доказывается справедливость теоремы в случае, когда серединой отрезка $[pl]$ будет любая другая вершина шестиугольника (8).

Теорема доказана.

Abstract. The sequence of symmetries and stitching of arbitrary elements of n-ary group are considered in the paper. The definition of stitching of arbitrary elements of n-ary group G is given.

Литература

1. Вакарелов, Д. Тернарни групи / Д. Вакарелов; Годишник софийск. ун-т, ма-темат. фак. 1966–1967, 1968. — Т. 61. — С. 71–105.

2. Русаков, С. А. Существование n-арных rs-групп / С. А. Русаков // вопросы алгебры. Вып. 6. Минск: Университетское, 1993. — С. 80–89.

3. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1998. — 182 с.

4. Кулаженко, Ю.И. Самосовмещение элементов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. Т.И. Васильевой, Гомель, 2002. — С. 66–71.

5. Кулаженко, Ю.И. Критерии полуабелевости n-арной группы $G = \langle X, (\ ), ^{[-2]}\rangle$, выраженные через самосовмещение ее элементов / Ю.И. Кулаженко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. — 2007. — №2(41). — С. 52–58.

6. Кулаженко, Ю.И. Симметрия, шестиугольники и полуабелевость n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. — 2008. — №2(47). — С. 99–106.

7. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1992. — 264 с.

8. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 47–64.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.06.08