Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(50), Ч1, 2008

УДК 519.2

Стационарное распределение сети с групповыми перемещениями в мультипликативной форме

Ю. В. МАЛИНКОВСКИЙ, Е. В. КОРОБЕЙНИКОВА

1 Модель однолинейного узла

Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с групповыми поступлением и обслуживанием. В систему поступает пуассоновский поток сообщений с интенсивностью λ. В момент поступления сообщения мгновенно формируется группа заявок случайного размера X_n (n-номер $n-$го по счету поступившего сообщения). Она присоединяется к очереди, если система не пуста, иначе из заявок этой группы формируется группа заявок, которая сразу начинает обслуживаться. Механизм ее формирования точно такой, как описанный ниже механизм формирования группы на обслуживание после окончания обслуживания очередной группы. Предполагается, что $\{X_n, n=1,2,...\}$ – последовательность независимых, неотрицательных, одинаково распределенных, целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием m_A и вероятностями значений $a(k)=P\{\ X_n=k\ \}$, $k=1,2,....$ Пусть $\breve{A}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a(k)z^k$ – производящая функция X_n. В момент окончания обслуживания очередной группы на обслуживание выбирается группа заявок случайного размера Y_n, которая обслуживается целиком, при этом обслуживание – экспоненциальное с интенсивностью μ ($n-$ номер $n-$й по счету обслуженной группы). Если в момент окончания обслуживания группы размер требуемой для обслуживания группы строго больше числа оставшихся заявок в системе, то на обслуживание выбирается некомплектная группа из оставшихся заявок. Предполагается, что $\{Y_n, n=1,2,......\}$ – последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием m_B и вероятностями значений $b(k)=P\{Y_n=k\}$, $k=1,2,....$ Пусть также $\breve{B}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b(k)z^k$ – производящая функция Y_n. Процессы поступления и обслуживания, размеры поступающих и обслуживаемых групп предполагаются независимыми.

Пусть $n(t)$ – число заявок в системе в момент t. Семейство случайных величин $\{n(t)\}$ есть цепь Маркова с непрерывным временем в пространстве состояний $Z_+=\{0,1,...\}$. Интенсивности ее перехода есть

$$\begin{aligned} &q(n,n+k)=\lambda a(k), \qquad k\ge 1, n\ge 0,\\ &q(n,n-k)=\mu b(k), \qquad n>k\ge 1,\\ &q(n,0)=\mu\overline{B}(n)=\mu(1-b(1)-b(2)-...-b(n-1)), \qquad n\ge 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В [1-3] установлено, что условием эргодичности $n(t)$ является

$$\lambda\cdot m_A<\mu\cdot m_B, \tag{1.2}$$

которое будет предполагаться всюду далее выполненным. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей процесса $X(t)$ можно записать в виде

$$\rho P(0)=\sum_{k=1}^{\infty}P(k)\overline{B}(k), \tag{1.3}$$

$$(1+\rho)P(n)=\sum_{k=1}^{\infty}P(n+k)b(k)+\rho\sum_{k=1}^{n}P(n-k)a(k)\,,\quad n\geq 1,\ \text{ где } \rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{1.4}$$

Решение (1.3), (1.4) будем искать в виде смещенного геометрического распределения $\{P(n),\quad n=0,1,\ldots\}$, где

$$P(0)=P_0,\quad P(n)=(1-P_0)(1-c)c^{n-1},\quad n=1,2,\ldots,\quad P_0,c\in(0,1). \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3), получим $\rho P_0=(1-P_0)(1-\breve{B}(c))$, откуда

$$\breve{B}(c)=\frac{1-(1+\rho)P_0}{1-P_0}. \tag{1.6}$$

Отметим, что $\breve{B}(z)$ строго возрастает на [0,1] и нестрого выпукла вниз. Рассмотрим уравнение

$$\breve{B}(c)=\alpha\,. \tag{1.7}$$

В силу выше сказанного $\alpha\in(0,1)$, если и только если $c\in(0,1)$. В силу строгого возрастания и нестрогой выпуклости $\breve{B}(c)$, очевидно, $c\geq\alpha$. Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Если* $\alpha\in(0,1)$, *то уравнение* (1.7) *имеет единственный корень* c. *Этот корень находится в промежутке* $[\alpha,1)$.

По лемме 1, если решение уравнений равновесия (1.3), (1.4) в форме (1.5) существует, то необходимо выполняется $P_0<\dfrac{1}{1+\rho}$. Согласно (1.5) $P(n+k)=P(n)c^k$. Умножая (1.4) на $(z)^n$ и складывая по всем $n=1,2,\ldots$, имеем

$$(\lambda+\mu)(\breve{P}(z)-P_0)=\mu(\breve{P}(z)-P_0)\breve{B}(c)+\lambda\breve{A}(z)\breve{P}(z). \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.8) выражения для производящей функции $\breve{P}(z)=\dfrac{P_0+(1-P_0-c)\cdot z}{1-c\cdot z}$, получим

$$\breve{A}(z)=\frac{(1-c)z}{P_0+(1-P_0-c)z} \tag{1.9}$$

Откуда следует, что X_n распределена по геометрическому закону

$$a(n)=(1-a)a^{n-1}\ ,\ \text{где}\ \ a=\frac{P_0+c-1}{P_0}. \tag{1.10}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено* (1.2). *Для того, чтобы стационарное распределение* $X(t)$ *имело форму смещенного геометрического распределения* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $P_0<\dfrac{1}{1+\rho}$ *и существовала абсолютно монотонная функция* $\breve{A}(z)$, *удовлетворяющая* $\breve{A}(1)=1$ *и равенству* (1.9). *Тогда* $\breve{A}(z)$ *будет задавать производящую функцию размеров поступающих групп.*

Известно [5], что для квазиобратимости цепи Маркова $X(t)$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\rho P(n)=\sum_{k=1}^{\infty}P(n+k)b(k),\quad n\geq 1, \tag{1.11}$$

$$P(n)=\rho\sum_{k=0}^{n-1}P(k)a(n-k),\quad n\geq 1, \tag{1.12}$$

$$\rho P(0)=\sum_{k=1}^{\infty}P(k)\bar{B}(k). \tag{1.13}$$

Пусть цепь Маркова $X(t)$ квазиобратима, а стационарные вероятности $P(n),\ n=1,2,\ldots,$ имеют форму (1.5). Подставляя (1.5) в (1.11), получим $\breve{B}(c)=\rho$. Из уравнений (1.11)-(1.13) находим, что $P_0 = 1-\rho$, откуда следует, что $\rho < 1$, а параметр геометрического распределения $a = \dfrac{c-\rho}{1-\rho}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие эргодичности $\lambda m_A < \mu m_B$. Для того, чтобы цепь Маркова $X(t)$ была квазиобратимой, а ее стационарное распределение имело форму смещенного геометрического распределения (1.5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $\rho < 1, P_0 = 1-\rho$, а размеры поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром $a = \dfrac{c-\rho}{1-\rho}$, где c – корень уравнения $\breve{B}(c) = \rho$.*

2 Модель сети с групповыми перемещениями

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, склеенную из узлов того же типа, как система, рассмотренная в разделе 1. Обслуженная в i-м узле группа заявок мгновенно покидает сеть, посылая сообщение в j-й узел с вероятностью p_{ij}, а с вероятностью p_{i0} не посылая никаких сообщений ($i, j = \overline{1,N}$, $\sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$, $p_{ii} = 0$). Предположим, что расширенная матрица маршрутов неприводима. Тогда система линейных уравнений трафика

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i p_{ij}, \qquad j = \overline{1,N}, \tag{2.1}$$

имеет единственное строго положительное решение.

Пусть $n(t)$ – число заявок в i-м узле в момент t. Состояние сети будем описывать неприводимой цепью Маркова $\{n(t)\}$ с непрерывным временем с пространством состояний Z_+^N, где $n(t) = (n_1(t), n_2(t), ...n_N(t))$. Предположим, что выполнено условие эргодичности

$$\gamma_i m_{A_I} < \mu_i m_{B_I}, \qquad i = \overline{1,N}. \tag{2.2}$$

Так как рассматриваемая сеть получается с помощью стандартной операции склеивания узлов, описанных в разделе 1, то по теореме Келли, если узлы в сети будут квазиобратимыми, то стационарное распределение будет иметь форму

$$p(n) = p_1(n_1) p_2(n_2)...p_N(n_N), \tag{2.3}$$

где $p_{ij} = \{p_j(n_j)\}$ – стационарное распределение изолированного узла, на который направляется стандартный пуассоновский поток сообщений интенсивности γ_i, где $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N)$ – строго положительное решение линейных уравнений трафика (2.1).

Abstract. The paper considers queuing network with batch moving. It is established that the stationary distribution has the product form.

Литература

1. Miyazawa, M. A. Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers / M. Miyazawa, P.G. Taylor // Adv. Appl. Probab., 1997. Vol. 29. – No. 2. – P. 1-22.

2. Chao, X. On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals / X. Chao, M. Pinedo // Prob. Eng. Inf. Sci., 1993. – Vol. 7. – P. 301–304.

3. Chao, X. Network of Assembly Queues with Product-form Solution / X. Chao, M. Pinedo, D. A. Shaw // J. Appl. Prob., 1996. – V.33. – P.858–869.

4. Kelly, F.P. Reversibility and Stochastic Networks / F.P. Kelly – N.Y.:Wiley. 1979.

5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. / В. Феллер – М.:Мир, 1984.

6. Pollet, P.K. Preserving Partial Balance in Continuous-time Markov Chains / P.K. Pollet // Adv. Appl. Probab., 1987. – V. 19. – №2. – P. 431–453.

7. Taylor, P.G. Quasi-reversibility and Networks of Queues with Non-standard Batch Movements / P.G. Taylor // Oper. Res., 1997. – № 2. – P. 602–610.

8. Малинковский, Ю.В. Мультипликативность стационарного распределения состояний для одного класса сетей массового обслуживания / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика, 1988. – № 2. – С. 108–118.

9. Малинковский, Ю.В. Критерий точечной независимости состояний узлов в открытой стационарной марковской сети обслуживания с одним классом заявок / Ю.В. Малинковский // Теория вероятностей и ее применения, 1990. – Т. 35. – № 4. – С.779–784.

10. Малинковский, Ю.В. Мультипликативность стационарного распределения открытых сетей обслуживания со стандартными узлами и однотипными заявками / Ю.В. Малинковский // Проблемы передачи информации, 1999. – Т. 35. – Вып. 1. – С.96–110.

Гомельский государственный
университет имени Ф.Скорины,

Гомельский государственный технический
университет имени П.О.Сухого

Поступило 30.04.08