

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. П. Лемешев

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ВЕКТОРЫ.
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ.
ПРЕДЕЛЫ**

Практическое пособие

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 512.642(076)
ББК 22.16я73
Л473

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук В. Н. Семенчук,
канд. физ.-мат. наук Т. И. Васильева

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Лемешев, В. П.

Л473 Высшая математика. Векторы. Арифметические
пространства. Элементарные функции. Пределы :
практическое пособие / В. П. Лемешев ; М-во образования
Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им.
Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 46 с.
ISBN 978–985–577–377–2

В практическом пособии изложены основы курса высшей математики по темам: «Векторное исчисление в пространстве», «Арифметическое векторное пространство», «Квадратичные формы, элементарные функции», «Пределы функции одной переменной».

Адресовано студентам первого курса экономических специальностей вуза.

УДК 512.642(076)
ББК 22.16я73

ISBN 978–985–577–377–2

© Лемешев В. П., 2017

© Учреждение образования «Гомельский
государственный университет
имени Франциска Скорины», 2017

Оглавление

Предисловие.....	4
1 Векторы.....	5
2 Векторные пространства.....	13
3 Квадратичные формы.....	24
4 Функции одной переменной.....	29
5 Пределы.....	36
Литература.....	46

Предисловие

Практическое пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей дневной и заочной форм обучения. Оно представляет собой изложение основ курса высшей математики по темам: «Векторное исчисление в пространстве», «Арифметическое векторное пространство, квадратичные формы, элементарные функции и их свойства», а также «Пределы функции одной переменной». Данные темы составляют теоретическую базу курса высшей математики в первом семестре.

Изложение теоретического материала компактно и сопровождается рассмотрением большого количества примеров, анализ решений которых будет способствовать выполнению самостоятельной работы студентов над индивидуальными заданиями в течение семестра.

Материал является основой для изучения таких тем и разделов высшей математики, как аналитическая геометрия в пространстве, математическое программирование, дифференциальное исчисление функций одной переменной, может быть использован для подготовки студентов к экзамену по высшей математике во втором семестре.

1 Векторы

1.1 Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными*. Это площадь, длина, объем, температура, работа, масса и т. д.

Другие величины – сила, скорость, ускорение определяются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными*. Их изображают в виде геометрических объектов – векторов.

Вектор – направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий длину и определенное направление. Если A – начало вектора, B – его конец, то такой вектор обозначается как $\overrightarrow{AB}$, или $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ с началом в точке B и концом в точке A называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$ и обозначается как $(-\overrightarrow{AB})$, или $(-\vec{a})$.

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается как $\vec{0}$. Считается, что он не имеет направления.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным вектором* и обозначается как $\vec{e}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Это обозначается как $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Нулевой вектор $\vec{0}$ считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора считаются *равными* ($\vec{a} = \vec{b}$), если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

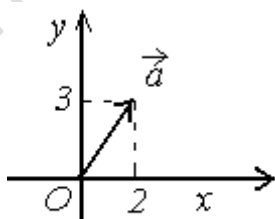


Рисунок 1

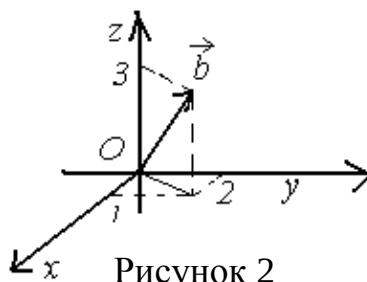


Рисунок 2

Из определения равенства векторов следует, что векторы можно переносить параллельно своему направлению. Поэтому в дальнейшем будем считать, что все векторы имеют начало в точке O начала

координат. Тогда для обозначения вектора достаточно указать координаты его конца – точки B . На рисунок 1 изображен вектор $\vec{a}(2; 3)$, на рисунок 2 вектор $\vec{b}(1; 2; 3)$.

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

1.2 Линейные операции над векторами

1.2.1 Сложение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два произвольных вектора. Переместим вектор $\vec{b}$ таким образом, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$, тогда вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается как $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рисунок 3). Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*. Если у векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совместить начала и построить на их основе параллелограмм, то его диагональ, проходящая через это начало будет равна так же вектору $\vec{a} + \vec{b}$ (рисунок 4).

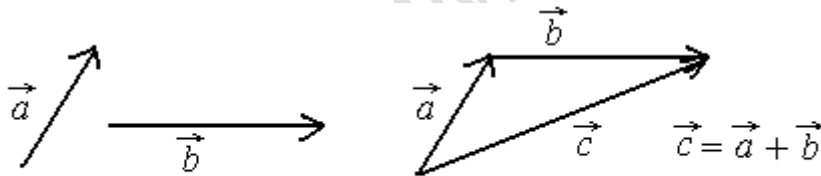


Рисунок 3

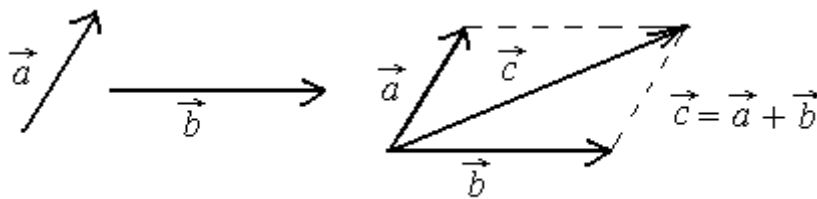


Рисунок 4

Это правило называется *правилом параллелограмма*. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$ (рисунок 5).

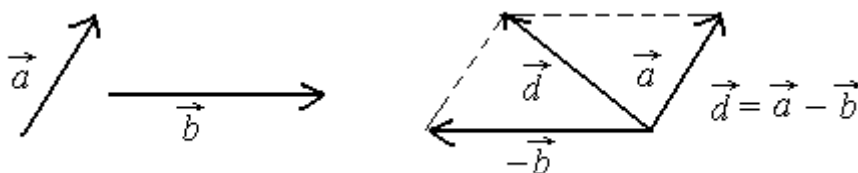


Рисунок 5

Таким образом, в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна диагональ будет равна сумме этих векторов, другая – их разности (рисунок 6).

По свойству сторон и диагоналей параллелограмма справедлива формула

$$|\vec{d}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

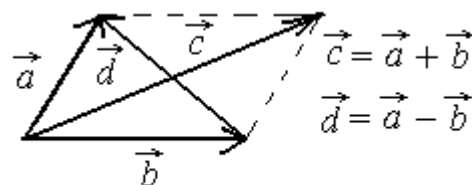


Рисунок 6

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$ (или $\vec{a}\lambda$), который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$ и имеет то же направление, если $\lambda > 0$, и противоположное вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ всегда коллинеарны.

1.2.2 Свойства линейных операций над векторами

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чисел λ_1 и λ_2 справедливы следующие соотношения:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;
- 4) $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$;
- 5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Обозначим единичные векторы, направленные вдоль осей OX и OY соответственно через $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Тогда вектор $\vec{a}(x; y)$ может быть представлен в виде суммы векторов $\vec{a} = \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (рисунок 7). Соответственно в пространстве верно равенство $\vec{a}(x; y; z) = \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy} + \overrightarrow{Oz} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

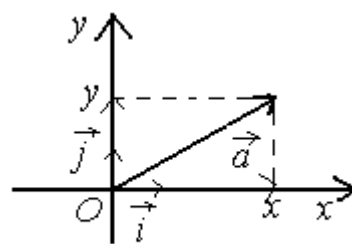


Рисунок 7

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются *ортами*.

1.3 Длина вектора

Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ в трехмерном пространстве имеет координаты $(x; y; z)$. Тогда его длина равна длине отрезка OA , где точки O и A имеют координаты соответственно $(0; 0; 0)$ и $(x; y; z)$, и может быть вычислена по формуле

$$|\overrightarrow{OA}| = |OA| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

На плоскости вектор $\vec{a}(x; y)$ имеет длину

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.4 Условие коллинеарности двух векторов

Пусть ненулевые векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны. Тогда $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, следовательно, $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2$. Отсюда

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

то есть координаты векторов пропорциональны. Это и есть *условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* .

1.5 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

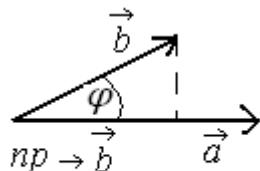


Рисунок 8

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

С другой стороны скалярное произведение можно представить как произведение длины одного вектора на длину проекции на него второго вектора, как указано, например, на (рисунок 8).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем *ортогональными*, если угол между ними составляет 90° . В этом случае выполняется условие $\cos \varphi = \cos 90^\circ = 0$ и выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, которое называют *условием ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* .

1.5.1 Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, числа λ справедливы следующие свойства:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;

$$3) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

$$4) \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

В частности, для единичных векторов (орт) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ справедливы соотношения

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1.$$

Выразим значение скалярного произведения через координаты векторов. Пусть в пространстве заданы векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Тогда

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

и по свойствам скалярного произведения

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{i}^2 + x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + \\ &+ y_1x_2\vec{j} \cdot \vec{i} + y_1y_2\vec{j}^2 + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \cdot \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \cdot \vec{j} + z_1z_2\vec{k}^2 = \\ &= x_1x_2 + 0 + 0 + 0 + y_1y_2 + 0 + 0 + 0 + z_1z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Исходя из этой формулы, можно записать значение косинуса угла между векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Аналогичная формула угла между векторами верна и для плоских векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

1.6 Векторное произведение

В пространстве рассматриваются векторные произведения векторов.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим трем свойствам (рисунок 9):

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

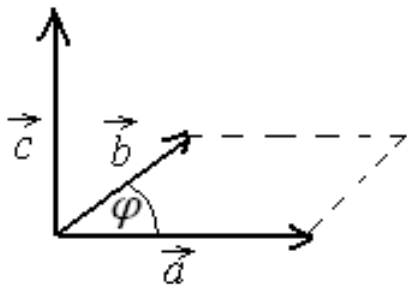


Рисунок 9

2) вектор $\vec{c}$ имеет длину, равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi;$$

3) вектор $\vec{c}$ направлен в ту сторону, из которой поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.

Обозначается векторное произведение как $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

1.6.1 Свойства векторного произведения

1) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;

2) для любого числа λ справедливо $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;

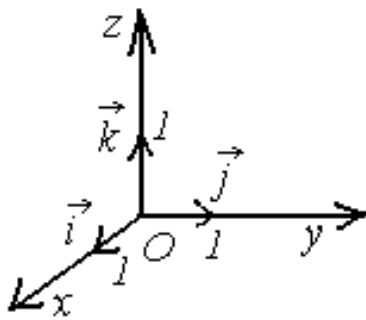


Рисунок 10

3) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

В частности, для единичных векторов (орт) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рисунок 10) справедливы соотношения

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Выразим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через их координаты.

Пусть

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2; y_2; z_2).$$

Тогда

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

и по свойствам векторного произведения

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \\
&= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i} \times \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \times \vec{j}) + \\
&+ x_1z_2(\vec{i} \times \vec{k}) + y_1x_2(\vec{j} \times \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \times \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j} \times \vec{k}) + z_1x_2(\vec{k} \times \vec{i}) + \\
&+ z_1y_2(\vec{k} \times \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k} \times \vec{k}) = x_1x_2\vec{0} + x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1y_2\vec{0} + \\
&+ y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} + z_1z_2\vec{0} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + \\
&+ (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \text{ Таким образом, } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Это есть символическая формула для вычисления координат векторного произведения через координаты исходных векторов.

Так как длина векторного произведения по определению есть площадь параллелограмма, построенного на исходных векторах, то эта площадь вычисляется по формуле

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

1.7 Смешанное произведение векторов

В пространстве также можно рассматривать комбинированные векторные и скалярные произведения векторов.

Смешанным произведением трех векторов $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ называется скалярное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Построим на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллелепипед (рисунок 11). Обозначим $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, тогда

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}.$$

Так как $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}$ равна $\pm h$, где h — высота параллелепипеда,

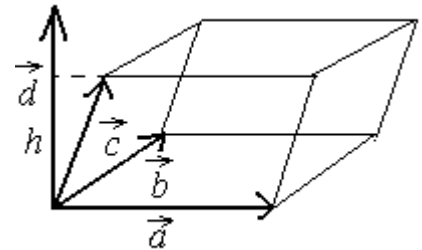


Рисунок 11

то смешанное произведение равно $\pm V$, где V – объем параллелепипеда. Таким образом, смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем пирамиды, построенной на этих векторах, тогда будет равен

$$V = \frac{1}{6} (\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

1.7.1 Свойства смешанного произведения

1) Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не меняется при их циклической перестановке, то есть

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b});$$

2) смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного произведений, то есть

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c});$$

3) смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух его векторов, то есть

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{a}\vec{b});$$

4) смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Выразим значение смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ через их координаты. Пусть

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2), \vec{c} = (x_3; y_3; z_3).$$

Тогда в разложении по ортам они имеют вид

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}, \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

и по свойствам векторного и скалярного произведений имеем

$$\begin{aligned} (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right) \cdot (x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, справедлива формула

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2 Векторные пространства

2.1 Арифметическое n -мерное пространство

Арифметическим n -вектором называют упорядоченный набор из n действительных чисел. Обозначается как $a = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – действительные числа. Вектор $0 = (0; 0; \dots; 0)$ называется *нулевым n -вектором*.

Пусть $a = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $b = (y_1; y_2; \dots; y_n)$, λ – некоторое число. Определим сумму n -векторов и произведение n -вектора на число λ следующим образом:

$$a + b = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot a = (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n).$$

Множество всех n -мерных векторов называется *арифметическим векторным пространством* и обозначается R^n . Так в качестве R^2 можно рассматривать множество всех векторов на плоскости, R^3 – множество всех векторов в пространстве.

2.2 Аксиомы векторного пространства

Для любых векторов $a, b, c \in R^n$ и чисел $\lambda, \mu, 1 \in R$ выполняются следующие свойства:

- 1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность суммы векторов);
- 2) $a + 0 = 0 + a = a$ (наличие нейтрального элемента нуль для суммы векторов);
- 3) $a + (-a) = 0$ (наличие противоположного вектора);
- 4) $a + b = b + a$ (коммутативность);

5) $\lambda \cdot (a + b) = \lambda a + \lambda b$ (дистрибутивность умножения на сумму векторов);

6) $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda a + \mu a$ (дистрибутивность произведения суммы чисел на вектор);

7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$ (ассоциативность умножения произведения чисел на вектор);

8) $1 \cdot a = a$ (существование нейтрального элемента при умножении чисел на вектор).

Свойства 1–8 называются *аксиомами n -векторного пространства*.

В общем случае, множество, для которого выполняются аксиомы 1–8, называется *линейным векторным пространством*.

Скалярным произведением двух n -векторов

$$a = (x_1; x_2; \dots; x_n) \text{ и } b = (y_1; y_2; \dots; y_n)$$

называется число, равное

$$a \cdot b = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

На основании этого вводится длина вектора как квадратный корень из его скалярного квадрата, то есть если $a = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, то

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Введенная таким образом длина n -вектора обладает всеми свойствами длины векторов плоскости и пространства.

2.3 Свойства длины n -вектора

1. $|\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|$, для любого n -вектора a и числа $\lambda \in R$.

2. $|a + b| \leq |a| + |b|$, для любых n -векторов a и b (неравенство треугольника).

Угол φ между векторами

$$a = (x_1; x_2; \dots; x_n), b = (y_1; y_2; \dots; y_n)$$

определяется равенством $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$, откуда

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}.$$

2.4 Базис n -мерного пространства

Пусть задана система n -мерных векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ из линейного пространства R^n .

Вектор вида $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называется *линейной комбинацией* этих векторов.

Пример 1. Для трехмерных векторов $a_1 = (2; 3; 1), a_2 = (-3; 1; 4)$ пространства R^3 , вектор $a = 2a_1 + 3a_2 = (-5; 9; 14)$ является линейной комбинацией векторов a_1 и a_2 .

Система из k векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ называется *линейно независимой*, если из того, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0,$$

всегда следует равенство

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0,$$

в противном случае система называется *линейно зависимой*.

Линейную зависимость n -векторов можно выразить следующим образом. Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$$

и векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ являются линейно зависимыми. Тогда, по крайней мере, одно из чисел $\alpha_i \neq 0$ (например, $\alpha_1 \neq 0$) и

$$\alpha_1 a_1 = -\alpha_2 a_2 - \dots - \alpha_k a_k, a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} a_k.$$

Вектор a_1 является линейной комбинацией остальных векторов. Таким образом, система из k векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Система векторов n -мерного пространства зависима тогда и только тогда, когда ранг матрицы, строки которой являются векторами системы, меньше их количества. Если же ранг матрицы в точности равен количеству этих векторов, то они являются линейно независимыми.

Рангом системы n -векторов называется максимальное количество линейно независимых векторов этой системы.

Пример 2. В пространстве R^3 единичные векторы $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ и $\vec{k} = (0; 0; 1)$ являются линейно независимыми.

Базисом n -мерного векторного пространства R^n называется любая линейная независимая система векторов, через которые можно выразить любой вектор пространства. Базисов в пространстве может быть бесконечное множество. Количество векторов в базисе пространства называется его размерностью.

Теорема 5. Базис арифметического n -мерного пространства R^n состоит из n векторов.

Доказательство. Покажем линейную независимость системы векторов

$$e_1 = (1; 0; \dots; 0), e_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, e_n = (0; 0; \dots; 1).$$

Пусть

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

Запишем это равенство в координатной форме

$$\alpha_1 (1; 0; \dots; 0) + \alpha_2 (0; 1; \dots; 0) + \alpha_n (0; 0; \dots; 1) = (0; 0; \dots; 0),$$

или

$$(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) = (0; 0; \dots; 0).$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

то есть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ — линейно независимы.

Для произвольного вектора $a = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ очевидно равенство

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Таким образом, векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис пространства.

Предположим, что существует другой базис $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ пространства R^n , где

$$c_m = (a_{m1}; a_{m2}; \dots ; a_{mn})$$

и $m > n$, то есть число векторов больше n . Тогда выполняется равенство

$$a = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_m c_m,$$

что равносильно следующей системе

[illegible]

Число уравнений системы меньше, чем число неизвестных, поэтому ранг матрицы системы ограниченной не может быть больше, чем n , следовательно, система векторов $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ линейно зависима и не может образовывать базис. Теорема доказана.

2.5 Координаты векторов

Если в пространстве R^n выбран некоторый базис $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то для произвольного вектора b справедливо представление

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n.$$

Числа $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называются *координатами вектора b в базисе $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$* . В различных базисах пространства R^n один и тот же вектор будет иметь различные координаты.

2.6 Линейные операторы

В пространстве R^n можно определить преобразования, которые сохраняют линейные операции.

Отображение $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ векторного пространства называется *линейным оператором*, если для любых векторов a, b и для любого числа λ выполняются условия:

- 1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
- 2) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$.

2.6.1 Собственные значения и собственные векторы операторов

Собственным вектором линейного преобразования φ (или соответствующей матрицы A) называется такой вектор $a \neq 0$, что

$$\varphi(a) = \lambda a.$$

Число λ называется собственным значением оператора φ для вектора a . После линейного преобразования φ векторы $\varphi(a)$ и a являются коллинеарными.

Пусть $\varphi(a) = \lambda a$ для некоторого собственного вектора a и собственного значения λ . Тогда $(a)A = \lambda(a)$, $(a)A - \lambda(a) = 0$ или $(a)(A - \lambda E) = 0$. Так как $a \neq 0$, то $|A - \lambda E| = 0$.

Последнее уравнение называется *характеристическим*. Оно применяется для нахождения собственных значений матрицы.

Таким образом, собственные значения являются корнями характеристического уравнения.

Пример 3. Найти все собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ пространства R^3 имеющего матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

В нашем случае

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первого столбца

$$(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 - \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3 - \lambda)(24 - 4\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 3) - 12 + 2\lambda + 3 + 6 - 12 + 3\lambda = 0,$$

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 46\lambda - 48 = 0.$$

Подстановкой убеждаемся, что $\lambda = 2$ является корнем уравнения. Разделив левую часть уравнения на $\lambda - 2$, получим разложение

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 11\lambda + 24) = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 8$. Найдем собственные векторы для каждого из найденных собственных значений.

Случай 1. $\lambda = 2$. Тогда для собственного вектора $x = (x_1; x_2; x_3)$ получаем матричное равенство $(x)(A - 2E) = (0)$, или

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0).$$

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}.$$

Положим $x_2 = t$, получим $x_3 = 0$, $x_1 = -t$. Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 2$, имеют вид

$$x = (-t; t; 0), \text{ где } t \in R.$$

Случай 2. $\lambda = 3$. Тогда для собственного вектора $x = (x_1; x_2; x_3)$ получаем матричное равенство $(x)(A - 3E) = (0)$, или

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0).$$

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решая систему методом Гаусса, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду, предварительно сократив третье уравнение на 3 и поменяв его местами с первым

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Положим

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_1 + x_2 = -t, \\ x_2 = -t \end{cases}$$

Отсюда $x_2 = -t, x_1 = -t + t = 0$.

Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 3$, имеют вид

$$x = (0; -t; t), \text{ где } t \in R.$$

Случай 3. $\lambda = 8$. Тогда для собственного вектора $x = (x_1; x_2; x_3)$ получаем матричное равенство $(x)(A - 8E) = (0)$, или

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0).$$

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 7 & 0 \\ 0 & 18 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 18x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}.$$

2.7 Модель международной торговли

[illegible]
$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *структурной матрицей торговли*. Разделив i -е уравнение системы на x_i , получим

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1} = 1 \\ a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2} = 1 \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn} = 1 \end{cases}$$

Для каждой из стран выручка от торговли равна

$$P_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}.$$

С учетом равенства $x_{ij} = a_{ij}x_j$, получим

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Торговля между странами будет бездефицитной для некоторой страны, если ее выручка будет не меньше национального дохода, то есть $P_i > x_i, i = \overline{1, n}$. Ясно, что эти условия невозможны. Так если какая-то страна получит прибыль, то хотя бы одна из других стран понесет убытки и для нее $P_i < x_i$. Таким образом, если торговля будет бездефицитной для всех стран, то должно быть $P_i = x_i, i = \overline{1, n}$, или

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = x_i, i = \overline{1, n}.$$

Тогда в матричном виде система выглядит как $AX = X$, или

$$(A - E)X = 0,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

– вектор – столбец национальных доходов. Матричное равенство

$$(A - E)X = 0$$

означает, что вектор X является собственным вектором линейного преобразования с матрицей A . При этом собственное значения для вектора X равно единице ($\lambda = 1$).

3 Квадратичные формы

3.1 Основные понятия

Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени от этих переменных. В общем виде квадратичную форму можно записать как

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы. Если обозначить через $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$, то квадратичная форма будет иметь вид $F = X^T A X$.

Пример 4. Матрицей для квадратичной формы

$$F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$$

будет

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма имеет канонический вид, если ее матрица является диагональной, т. е. форма содержит лишь слагаемые с квадратами переменных.

Выразим старые переменные x_i квадратичной формы через новые переменные y_i

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \dots + t_{1n}y_n \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \dots + t_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \dots + t_{nn}y_n \end{cases}.$$

Пусть $T = (t_{ij})$ – матрица перехода от переменных x к переменным y , то есть $X = TY$. Тогда новая квадратичная форма в матричном виде будет выглядеть как

$$F_1 = (TY)^T A (TY) = Y^T T^T A T Y = Y^T (T^T A T) Y = Y^T A_1 Y.$$

Матрица новой квадратичной формы, таким образом, будет равна

$$A_1 = T^T A T.$$

Теорема 7. Каждая действительная квадратичная форма подходящим преобразованием переменных может быть приведена к каноническому виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_r z_r^2,$$

где r – ранг матрицы A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ – ее собственные значения (без доказательства).

3.2 Алгоритм Лагранжа

Рассмотрим один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду, который известен как алгоритм Лагранжа. Пусть задана квадратичная форма $F = X^T A X$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если хотя бы один из диагональных элементов $a_{ii} \neq 0$, то делается переход к новым переменным по формулам:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \text{ и } y_j = x_j \text{ для } j \neq i.$$

В результате получим квадратичную форму относительно переменных y , в которой не будет смешанных произведений переменных, содержащих y_i . Продолжая этот процесс дальше, мы получим в итоге канонический вид квадратичной формы.

Если все диагональные коэффициенты матрицы A вида a_{ii} равны нулю, то для какого-нибудь слагаемого $a_{ij} \neq 0$ делается переход к новым переменным по формулам:

$$x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j \text{ и } x_k = y_k \text{ для } k \neq i \text{ и } k \neq j.$$

В результате в квадратичной форме появятся квадраты переменных и можно будет исключать из смешанных переменных либо y_i , либо y_j .

Пример 5. Привести квадратичную форму $F = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ к каноническому виду. Построить общее преобразование, приводящее квадратичную форму к этому виду.

Решение. Матрица данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все диагональные элементы матрицы равны нулю, то предварительно сделаем переход к новой форме, содержащей хотя бы один квадрат. Выберем элемент матрицы, не равный нулю. Таким является, например, элемент $a_{12} = 1$, поэтому подстановка имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Матрица перехода от одних переменных к другим имеет вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получим новую квадратичную форму

$$F_1 = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3,$$

матрица которой равна

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{22} \neq 0$, то в соответствии с алгоритмом Лагранжа сделаем подстановку

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = -2y_2 + 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = -0,5z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

Матрица перехода в этом случае имеет вид

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$F_2 = 2z_1^2 - 2(-0,5z_2 + z_3)^2 + 4z_1z_3 + 4(-0,5z_2 + z_3)z_3 = 2z_1^2 - 0,5z_2^2 + 2z_2z_3 - 2z_3^2 + 4z_1z_3 - 2z_2z_3 + 4z_3^2 = 2z_1^2 - 0,5z_2^2 + 4z_1z_3 + 2z_3^2,$$

матрица которой равна

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь делаем подстановку

$$\begin{cases} s_1 = 2z_1 + 2z_3 \\ s_2 = z_2 \\ s_3 = z_3 \end{cases}.$$

Из которой следует

$$\begin{cases} z_1 = 0,5s_1 - s_3 \\ z_2 = s_2 \\ z_3 = s_3 \end{cases}.$$

Матрица перехода имеет вид

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим следующую квадратичную форму:

$$F_3 = 2(0,5s_1 - s_3)^2 - 0,5s_2^2 + 4(0,5s_1 - s_3)s_3 + 2s_3^2 = 0,5s_1^2 - 2s_1s_3 + 2s_3^2 - 0,5s_2^2 + 2s_1s_3 - 4s_3^2 + 2s_3^2 = 0,5s_1^2 - 0,5s_2^2,$$

которая является канонической. Матрица этой формы имеет диагональный вид и равна

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим теперь преобразование, которое позволяет непосредственно получить в данном случае канонический вид. Для этого найдем общую матрицу перехода T , которая равна

$$T = T_1 T_2 T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее преобразование квадратичной формы, приводящее ее к каноническому виду, равно

$$\begin{cases} x_1 = 0.5s_1 - 0.5s_2 \\ x_2 = 0.5s_1 + 0.5s_2 - 2s_3 \\ x_3 = s_3 \end{cases}$$

Замечание. Если необходимо найти только канонический вид квадратичной формы без указания преобразования, то достаточно вычислить собственные значения ее матрицы и записать соответствующий вид. В данном случае составляем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\lambda^3 + 0 + 0 + 4\lambda - 0 + \lambda = 0,$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -\sqrt{5}, \lambda_2 = \sqrt{5}, \lambda_3 = 0$ и квадратичная форма с точностью до пропорциональных множителей эквивалентна форме

$$F = \sqrt{5}h_1^2 - \sqrt{5}h_2^2.$$

3.3 Знакопостоянные квадратичные формы

Действительная квадратичная форма $F = X^T A X$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для всех значений переменных x_i выполняется условие $F > 0$ ($F < 0$). Существуют специальные критерии для выяснения того, является ли данная квадратичная форма положительно или отрицательно определенной.

3.4 Критерий Сильвестра

Теорема 8. Действительная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны.

Действительная квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка ее матрицы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны. (Без доказательства).

4 Функции одной переменной

4.1 Понятие функции

Пусть даны два непустых множества X и Y . Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет не более одного элемента $y \in Y$, называется *функцией*. Так на рисунке 12 отображение f является функцией, а на рисунке 13 отображение g не является функциональным, так как в этом случае один элемент множества X отображается на два элемента множества Y .

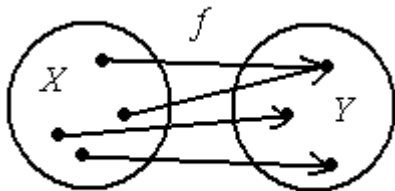


Рисунок 12

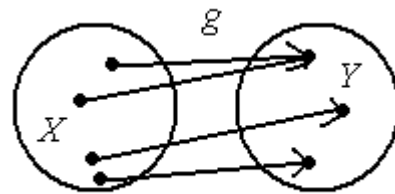


Рисунок 13

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

Если X и Y числовые множества, то функция f называется *числовой функцией*. Это записывается как $y = f(x)$. В данном случае переменная x называется *аргументом*, или *независимой переменной*, а y – *функцией*, или *зависимой переменной*. Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывается как $f(a)$.

Так, если $f(x) = 2x^2 + 1$, то $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$, $f(3) = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19$,
 $f(a) = 2a^2 + 1$, $f(t - 2) = 2(t - 2)^2 + 1 = 2t^2 - 8t + 8 + 1 = 2t^2 - 8t + 9$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$.

4.2 Способы задания функции

Существуют различные способы задания функциональной зависимости.

Аналитический: Функция определяется одной или несколькими формулами или в виде уравнений, например

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x}, y = \begin{cases} x - 1, & \text{при } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, y^2 + x^2 = 1.$$

Графический: В этом случае задается график функции (рисунок 14).

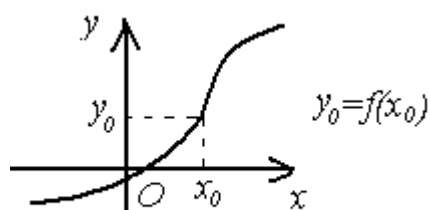


Рисунок 14

Табличный. Функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции, например

x	1	2	3	4	5
y	6	0	2	5	4

4.3 Четные и нечетные функции

Функция, определенная на множестве D , называется *четной* (нечетной), если для любого элемента $x \in D$ выполняются следующие условия:

- 1) $-x \in D$;
- 2) $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

График четной функции симметричен относительно оси Oy , а нечетной — относительно начала координат точки O .

Четными являются, например, функции:

$$y = x^2, y = |x|, y = \cos x, y = x^4 - 3x^2 + 2, y = \sin|x|.$$

Нечетными являются функции:

$$y = x, y = x^3, y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = x + \frac{1}{x}.$$

Функции $y = \sqrt{x}$, $y = x + 1$, $y = 3^x$, $y = \log_5 x$ не являются четными и не являются нечетными. Они называются *функциями общего вида*.

4.4 Монотонные функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и $D_1 \subseteq D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$:

1) из неравенства $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) \geq f(x_1)$), то функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве D_1 ;

2) из неравенства $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$), то функция $f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве D_1 .

Так функция $y = 2x + 1$ является возрастающей на всей числовой оси R , а функция $y = \sin x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и убывает на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие функции называются *монотонными*.

4.5 Ограниченные функции

Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D , называют *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Так функция $y = \cos x$ ограничена на всей числовой оси ($M = 1$), а линейная функция $y = 2x - 3$ ограничена на любом отрезке вида $[a; b]$ (интервале $(a; b)$) ($M = 2b - 3$).

4.6 Периодические функции

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , называется *периодической на этом множестве*, если существует такое наименьшее

число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ выполняются условия $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется *периодом функции*. Периодами будут так же числа, кратные T то есть $2T, 3T$ и т. д. Периодическими функциями являются, например:

$$y = \sin x (T = 2\pi), y = \cos x (T = 2\pi), y = \operatorname{tg} x (T = \pi),$$

$$y = \operatorname{ctg} x (T = \pi), y = \{x\} (T = 1).$$

4.7 Обратные функции

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и областью значений E . Если каждому $y_0 \in E$ соответствует единственное значение $x_0 \in D$, такое, что $f(x_0) = y_0$, то можно определить функцию $x = g(y)$ с областью определения E и областью значений D . Для такой функции из того, что $b = f(a)$ следует равенство $a = g(b)$. Такая функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается как $x = g(y) = f^{-1}(y)$.

Так как независимая переменная обозначается через x , а зависимая через y , то обратную функцию записывают так же в виде $y = g(x)$. Приведем примеры функций и их обратных.

Для функции $y = x$ обратной функцией является также функция $y = x$. Если $y = 2x$, то обратной будет функция $y = \frac{x}{2}$, у функции $y = 3x + 1$ обратная — $y = \frac{x-1}{3}$. Показательная функция $y = a^x$ имеет обратную логарифмическую функцию $y = \log_a x$. Тригонометрическая функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию $y = \arcsin x$ и т. д.

В общем случае, для определения уравнения обратной функции к функции $y = f(x)$ переменные x и y в записи функции меняют местами и выражают снова переменную y .

4.7.1 Основные свойства обратных функций

Если задана функция $y = f(x)$ и ее обратная $y = g(x)$, то справедливы соотношения:

- 1) $D(f) = E(g), D(g) = E(f)$;
- 2) если исходная функция возрастает (убывает), то и обратная функция так же возрастает (убывает);
- 3) графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рисунок 15);
- 4) всякая монотонная функция имеет обратную функцию.

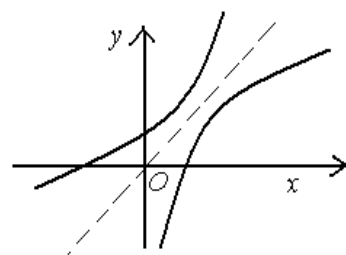


Рисунок 15

4.8 Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D , а функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве D_1 . Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от x или *суперпозицией* функций f и φ . Примерами сложных функций являются функции

$$y = \sin 3x, \quad y = \frac{1}{3x-2}, \quad y = \sqrt{x+1}, \quad y = \cos^2 x, \quad y = \log_3 \cos x.$$

4.9 Основные элементарные функции и их графики

На рисунке 16 изображены эскизы графиков основных элементарных функций.

4.9.1 Степенные функции

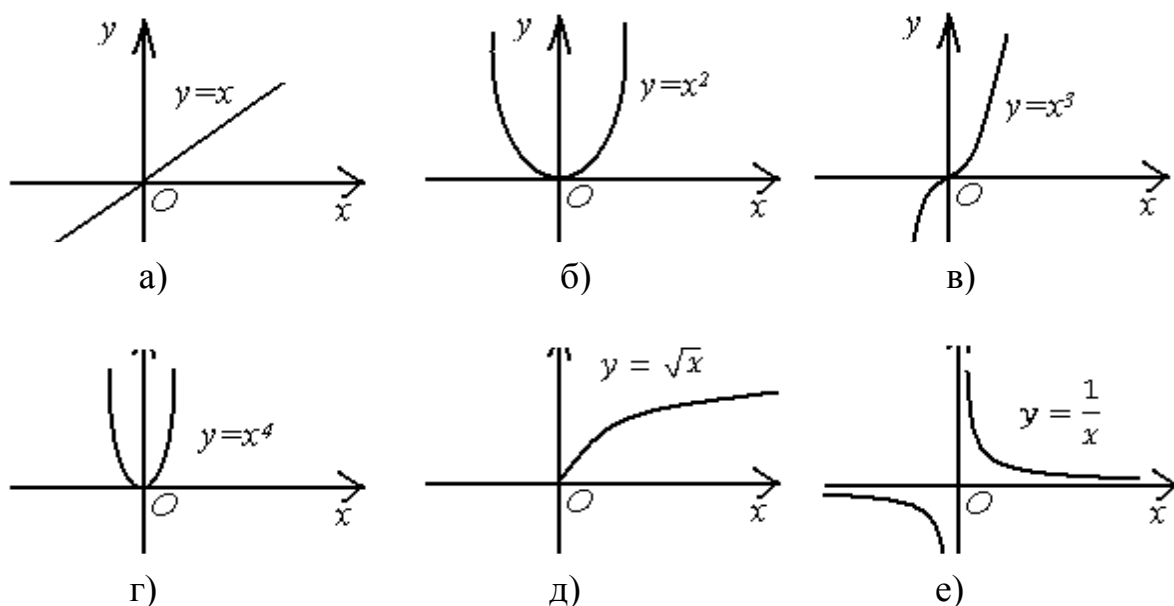


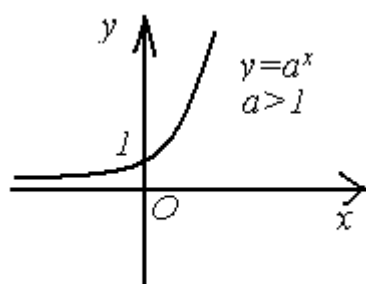
Рисунок 16

- 1) $y = x, D(f) = R, E(f) = R$ (рисунок 16 а);
- 2) $y = x^2, D(f) = R, E(f) = [0; +\infty)$ (рисунок 16 б);
- 3) $y = x^3, D(f) = R, E(f) = R$ (рис 16 в);
- 4) $y = x^4, D(f) = R, E(f) = [0; +\infty)$ (рисунок 16 г);
- 5) $y = \sqrt{x}, D(f) = [0; +\infty), E(f) = [0; +\infty)$ (рисунок 16 д);
- 6) $y = \frac{1}{x}, D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

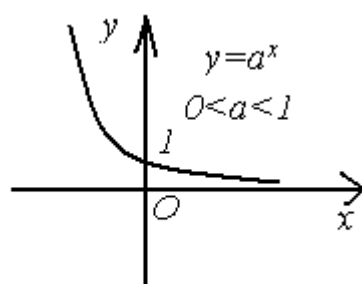
(рисунок 16 е).

4.9.2 Показательные функции

- 1) $y = a^x, a > 1, D(f) = R, E(f) = (0; +\infty)$ (рисунок 17 а);
- 2) $y = a^x, 0 < a < 1, D(f) = R, E(f) = (0; +\infty)$ (рисунок 17 б).



а)

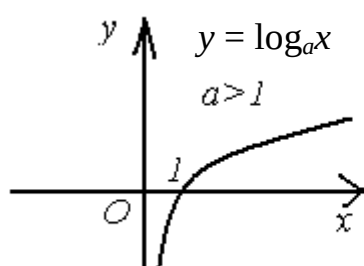


б)

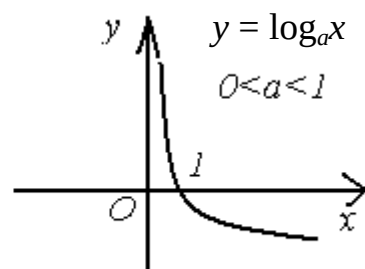
Рисунок 17

4.9.3 Логарифмические функции

- 1) $y = \log_a x, a > 1, D(f) = (0; +\infty), E(f) = R$ (рисунок 18 а);
- 1) $y = \log_a x, 0 < a < 1, D(f) = (0; +\infty), E(f) = R$ (рисунок 18 б).



а)



б)

Рисунок 18

4.9.4 Тригонометрические функции

- 1) $y = \sin x, D(f) = R, E(f) = [-1; 1]$ (рисунок 19);

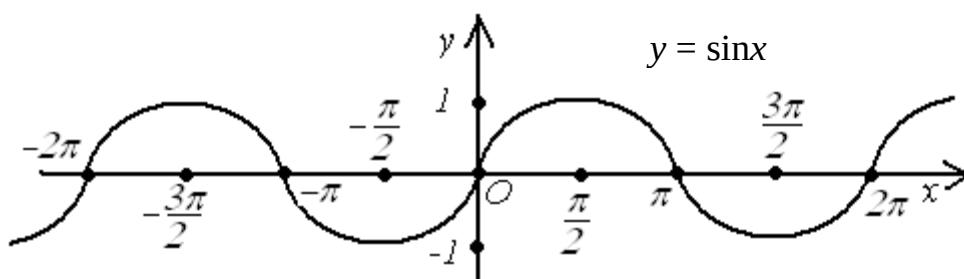


Рисунок 19

2) $y = \cos x$, $D(f) = R$, $E(f) = [-1; 1]$ (рисунок 20);

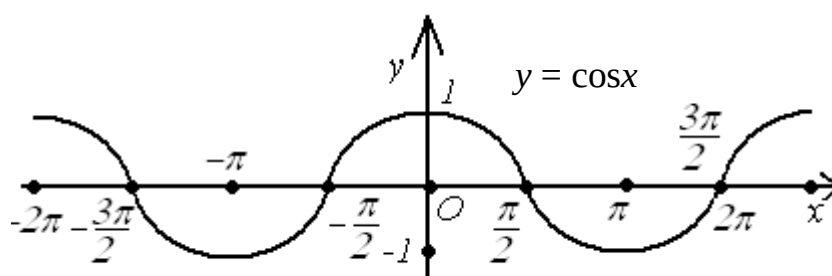


Рисунок 20

3) $y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $E(f) = R$ (рисунок 21);

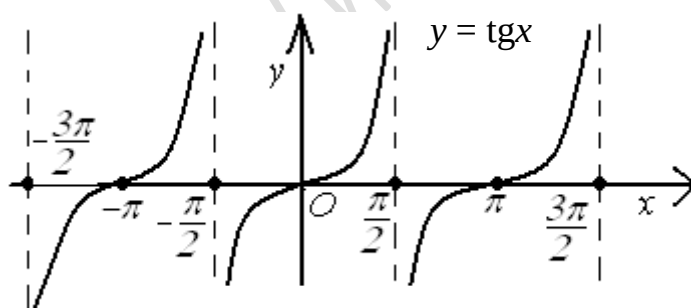


Рисунок 21

4) $y = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$, $E(f) = R$ (рисунок 22);

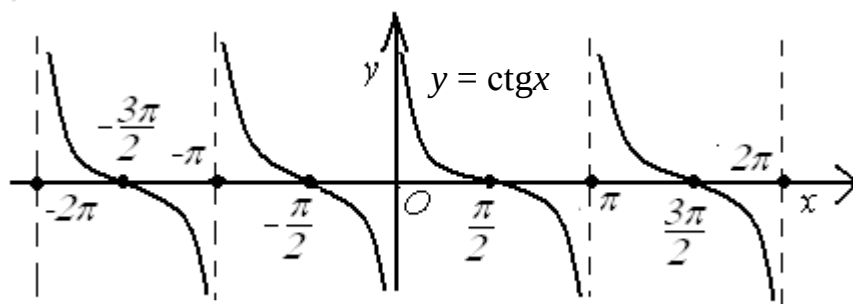
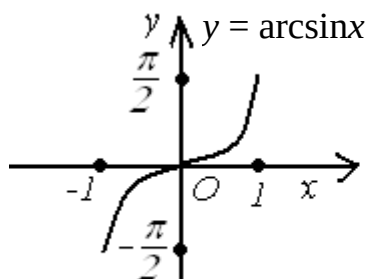


Рисунок 22

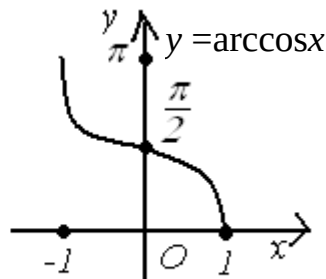
4.9.5 Обратные тригонометрические функции

1) $y = \arcsin x$, $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рисунок 23 а);

2) $y = \arccos x$, $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = [0; \pi]$ (рисунок 23 б);



а)

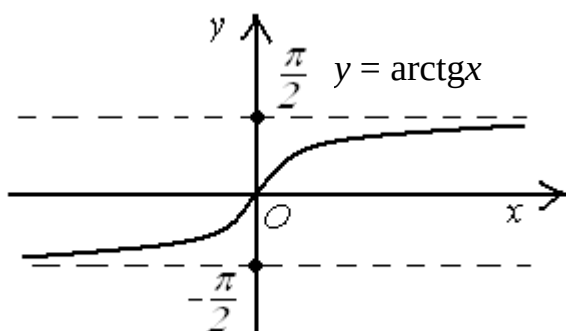


б)

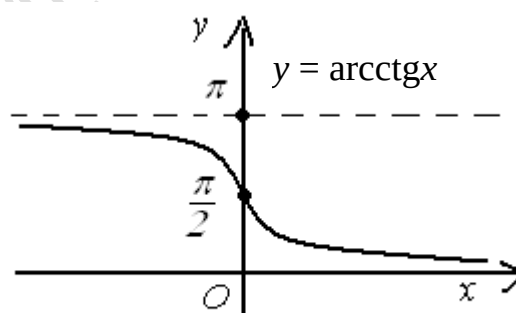
Рисунок 23

3) $y = \arctg x$, $D(f) = R$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рисунок 24 а);

4) $y = \text{arcctg } x$, $D(f) = R$, $E(f) = (0; \pi)$ (рисунок 24 б).



а)



б)

Рисунок 24

Функция $y = \arctg x$ возрастает, а функция $y = \text{arcctg } x$ убывает на всей числовой оси.

5 Пределы

5.1 Основные понятия

Окрестностью произвольной точки x_0 будем считать любой интервал $(a; b)$, содержащий эту точку.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a , кроме, может быть, самой точки a .

Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке a , если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ выполняется условие $|f(x) - b| < \varepsilon$. В таком случае записывают

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

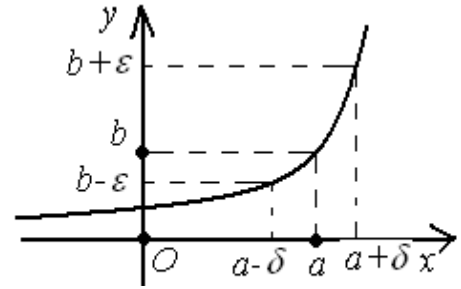


Рисунок 25

Определение предела в математических терминах можно записать следующим образом (рисунок 25):

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что из условия $|x - a| < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В определении предела функции $f(x)$ считается, что x стремится к a любым способом, оставаясь либо меньшим a , либо большим, либо колебаясь около точки a .

Число b_1 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева в точке* a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что из условия $a - x < \delta$ следует $|f(x) - b_1| < \varepsilon$.

Записывается это как

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1.$$

Аналогично определяется предел справа. Число b_2 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *справа в точке* a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что из условия $x - a < \delta$ следует $|f(x) - b_2| < \varepsilon$. Записывается это как

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2.$$

Если $b_1 \neq b_2$, то предела функции $f(x)$ в точке a не существует.

5.2 Предел функции при $x \rightarrow \infty$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$, существует такое число $M > 0$, что для всех x ,

удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Записывается это как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

5.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \rightarrow a$* , если для любого числа $M > 0$, $\exists \delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывается это как $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$ или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Если при $x \rightarrow a$, $f(x) > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Если при $x \rightarrow a$, $f(x) < 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при $x \rightarrow a$* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

5.3.1 Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

3. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

5. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая функция.

5.3.2 Теоремы о связи предела функции и бесконечно малых

Теорема 9. Если функция $y = f(x)$ имеет предел, равный b при $x \rightarrow a$, то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то есть если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что из условия $|x - a| < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е. $|f(x) - b - 0| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = 0,$$

то есть функция $f(x) - b = \alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$. Отсюда $f(x) = b + \alpha(x)$. Теорема доказана.

Теорема 10 (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа b и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, такое, что из $0 < |x - a| < \delta$ следует условие

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Так как $\alpha(x) = f(x) - b$, то получим: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

5.4 Основные теоремы о пределах

Теорема 11. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов. Т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2.$$

Тогда по теореме 9 имеем $f(x) = b_1 + \alpha(x)$, $g(x) = b_2 + \beta(x)$.
Следовательно,

$$f(x) \pm g(x) = b_1 \pm b_2 + (\alpha(x) \pm \beta(x)).$$

Так как по свойству 1 бесконечно малых, функция $\alpha(x) \pm \beta(x)$ является бесконечно малой, то по теореме 9

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b_1 \pm b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 12. *Функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ может иметь только один предел.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2.$$

По теореме 11

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 - b_2.$$

Следовательно, $b_1 = b_2$.

Теорема 13. *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, то есть*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2.$$

Тогда по теореме 9 имеем: $f(x) = b_1 + \alpha(x)$, $g(x) = b_2 + \beta(x)$.
Следовательно,

$$f(x) \cdot g(x) = b_1 \cdot b_2 + b_1\beta(x) + b_2\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Так как по свойствам 1 - 3 бесконечно малых функций, функция

$$b_1\beta(x) + b_2\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$$

является бесконечно малой, то по теореме 10

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = b_1 \cdot b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 14. *Постоянный множитель (константу) можно выносить за знак предела.*

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Доказательство. По теореме 13

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Теорема 15. *Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю. То есть*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2.$$

Тогда по теореме 9, $f(x) = b_1 + \alpha(x)$, $g(x) = b_2 + \beta(x)$ и

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{b_1 + \alpha(x)}{b_2 + \beta(x)} = \frac{b_1}{b_2} + \left(\frac{b_1 + \alpha(x)}{b_2 + \beta(x)} - \frac{b_1}{b_2} \right) = \\ &= \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_1 b_2 + b_2 \alpha(x) - b_1 b_2 - b_1 \beta(x)}{(b_2 + \beta(x)) b_2} = \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2 \alpha(x) - b_1 \beta(x)}{(b_2 + \beta(x)) b_2}. \end{aligned}$$

Так как по свойствам 1–3 бесконечно малых функций, функция

$$\frac{b_2 \alpha(x) - b_1 \beta(x)}{(b_2 + \beta(x)) b_2}$$

является бесконечно малой, то по теореме 10

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

5.5 Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = a$ и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Это означает, что вычисление предела функции в точке $x = a$ сводится к вычислению значения функции $f(x)$ в точке a .

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции.

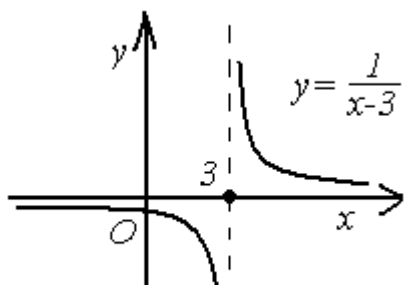


Рисунок 26

Если a точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется одно из следующих условий:

1) функция определена в окрестности точки a , но не определена в самой точке (рисунок 26);

2) функция определена в точке a и ее окрестности, но не существует предела при $x \rightarrow a$. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 3; \\ 4, & x \geq 3, \end{cases}$$

график которой изображен на рисунке 27.

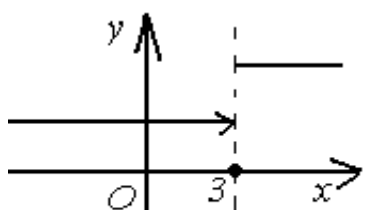


Рисунок 27

3) функция определена в точке a и ее окрестности, существует предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, но этот предел не совпадает с значением функции $f(x)$ в точке a (рисунок 28).

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.



Рисунок 28

Точка разрыва $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке существуют пределы слева и справа, но они не равны

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

Этому условию соответствуют точки, указанные на рисунках 27 и 28.

Точка разрыва $x = a$ называется *точкой разрыва второго рода*, если, по крайней мере, один из односторонних пределов равен плюс или минус бесконечности (рисунок 25).

5.6 Признаки существования пределов

Не всякая функция имеет предел. Так функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при $x \rightarrow \infty$ не имеют пределов.

Теорема 16. Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $g(x)$ и $h(x)$, стремящихся к одному и тому же пределу, то он так же стремится к этому пределу, то есть если

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0, \text{ что из } |x - a| < \delta_1 \text{ следует } |g(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0, \text{ что из } |x - a| < \delta_2 \text{ следует } |h(x) - b| < \varepsilon.$$

Тогда для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ выполняются оба неравенства и

$$g(x) - b \leq f(x) - b \leq h(x) - b.$$

Так как $-\varepsilon < g(x) - b < \varepsilon$, $-\varepsilon < h(x) - b < \varepsilon$, то $-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon$ или

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Теорема 17. (Без доказательства). Если функция $y = f(x)$ является монотонной и ограниченной при $x < a$ или при $x > a$, то существует ее левый предел

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x),$$

или ее правый предел

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

5.7 Первый замечательный предел

Теорема 18. *Справедливо следующее соотношение*

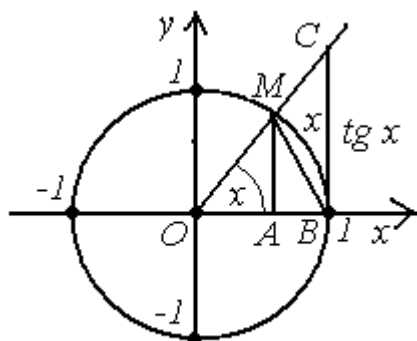


Рисунок 29

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Выберем на координатной плоскости круг с единичным радиусом и центром в начале координат (рисунок 29). Построим в первой четверти угол в x радиан. Тогда длина дуги MB будет так же равна x . Так как по построению

$$S_{\triangle MOB} < S_{\text{сект.} MOB} < S_{\triangle COB}$$

и отрезки $MA = \sin x$, $CB = \operatorname{tg} x$, то справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Отсюда разделив все части неравенства на выражение $\frac{1}{2} \sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ или } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

то по теореме 16, для $x > 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если же $x < 0$, то

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Так как пределы слева и справа равны, то получаем окончательно

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Замечание. Верным является так же и обратный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Данный предел называют *первым замечательным пределом*.

Пример 9. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Решение. По свойству пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

5.8 Второй замечательный предел

Теорема 19. (Без доказательства).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где $e \approx 2,718281828 \dots$.

Так как выражение в скобках стремится к единице, то предел имеет неопределенность 1^∞ и называется *вторым замечательным пределом*.

Пример 10. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

Решение. Так как предел имеет неопределенность вида (1^∞) и, следовательно, является вторым замечательным пределом, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x}(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{6x+9}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+9}{x}} = e^6.$$

Литература

- 1 Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под общ. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 471 с.
- 2 Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.
- 3 Общий курс высшей математики для экономистов / Б. М. Рудык [и др.]; под общ. ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА, 2002. – 656 с.
- 4 Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Тетра Системс, 2001. – Т. 1. – 544 с. – : Т. 2. – 448 с.
- 5 Гусак, А. А. Задачи и упражнения для высшей математике : учебное пособие для студ. естествен. спец. вузов : в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Высшая школа, 1988. – Ч. 1. – 247 с. – Ч. 2. – 228 с.
- 6 Письменный, Д. П. Конспект лекций по высшей математике : в 3 ч. Ч. 1. / Д. П. Письменный. – М. : Рольф, 2000. – 288 с.
- 7 Белько, И. В. Высшая математика для экономистов. I семестр : экспресс – курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. – М. : Новое издание, 2002. – 140 с.
- 8 Минюк, С. А. Высшая математика : учебное пособие для студентов экономических специальностей высших учебных заведений / С. А. Минюк, Е. А. Ровба. – Гродно : ГрГУ, 2004. – 407 с.
- 9 Рыбасенко, В. Д. Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики / В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с.

Производственно-практическое издание

Лемешев Валерий Петрович

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ВЕКТОРЫ.
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ.
ПРЕДЕЛЫ**

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 20.11.2017. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.

Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 881.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ