Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(56), 2009

УДК 530.1;539.12

Электромагнитные радиусы мезонов в пуанкаре-ковариантной кварковой модели

В. В. Андреев

Введение

Изучение электромагнитной структуры псевдоскалярных мезонов, как правило рассматривается, как дополнительная информация, связанная со структурными характеристиками нуклонов. Однако эта информация имеет и самостоятельное значение, когда речь идет об извлечении свойств взаимодействия кварков внутри мезонов. Для описания электромагнитной структуры мезонов, как двухкварковой системы использовалось множество подходов.

Только в рамках РГД этот вопрос рассматривался в целом ряде работ, начиная от динамики на световом фронте [1–6] и мгновенной формы динамики [7,8] и заканчивая точечной формой динамики [9–11]. Наименее разработанной формой динамики для описания электромагнитных свойств мезонов оказалась точечная форма. Результаты работы [9], которые неплохо описывали экспериментальные данные, были подвергнуты критике в работе [11] за необоснованные и бездоказательные предположения. В результате, для удовлетворительного описания экспериментальных данных, в работах [11–13] была предложена новая и достаточно сложная разновидность точечной формы РГД , в которой необходимо было отказаться от условия равенства 4-х скоростей систем с взаимодействием и без него. И хотя в результате выбора параметров удалось приблизиться к описанию поведения формфакторов пионов, тем менее существует разница между модельными вычислениями и расчетами [14].

Цель работы вычисление электромагнитных радиусов псевдоскалярных мезонов в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на точечной форме РГД посредством оригинальной методики вычисления электрослабых характеристик [15]. При этом согласованное описание характеристик будет распространяться не только на среднеквадратичные электромагнитные радиусы, но и другие характеристики (поляризуемости, лептонные константы связи), включая и массы псевдоскалярных и векторных мезонов .

1 Пуанкаре-ковариантная кварковая модель мезонов

В модели пуанкаре-ковариантной кварковой модели мезон представляется как связанная система двух спинорных частиц: кварка q и антикварка $\bar{Q}$ с массами m_q, m_Q соответственно. Задача на собственные значения для оператора массы связанного состояния Ψ с полным импульсом $\mathbf{Q}$, массой M_Ψ, спином J и проекцией спина μ может быть записана в виде:

$$\hat{M} \mid \Psi_{\mathbf{Q},J,\mu} >= (M_0 + \hat{V}) \mid \Psi_{\mathbf{Q},J,\mu} >= M_\Psi \mid \Psi_{\mathbf{Q},J,\mu} > . \tag{1}$$

Волновая функция (ВФ) связанной системы в РГД удовлетворяет в общем случае уравнению [16]:

$$\sum_{\ell',s'}\int\limits_0^\infty V^J_{\ell,s\,;\ell',s'}\left(\mathrm{k},\mathrm{k}'\right)\Phi^{J\mu}_{\ell',s'}\left(\mathrm{k}'\right)\mathrm{k}'^2\mathrm{dk}' = \left(M-M_0\right)\Phi^{J\mu}_{\ell,s}\left(\mathrm{k}\right) . \tag{2}$$

Как следует из вышеизложенного, модели для описания релятивистской системы в рамках РГД можно отнести к релятивистским потенциальным моделям. Для описания конкретных связанных релятивистских связанных систем необходимо определить потенциал взаимодействия между частицами. Такой выбор потенциалов определяет различные **пуанкаре-ковариантные модели**.

В данной модели используем межкварковый потенциал работы [17], который для псевдоскалярных и векторных мезонов представляет сумму:

$$\begin{aligned}
&\hat{V}\left(\mathrm{r}\right) = \hat{V}_{Coulomb}(\mathrm{r}) + \hat{V}_{linear}(\mathrm{r}) + \hat{V}_{SS}(\mathrm{r}) , \\
&\hat{V}_{Coulomb}(\mathrm{r}) = -\frac{4}{3}\,\frac{\alpha_s\left(\mathrm{r}\right)}{\mathrm{r}} = -\frac{4}{3\,\mathrm{r}}\,\sum_{k=1}^{7}\alpha_k\,\mathrm{erf}(\tau_k\,\mathrm{r}) , \\
&\hat{V}_{linear}(\mathrm{r}) = \sigma\,\mathrm{r}\left[\frac{\exp(-b^2\mathrm{r}^2)}{\sqrt{\pi}\,b\,\mathrm{r}} + \left(1+\frac{1}{2\,b^2\mathrm{r}^2}\right)\,\mathrm{erf}(b\,\mathrm{r})\right] + w_0 , \\
&\hat{V}_{SS}(\mathrm{r}) = -\frac{32\,\left(\mathbf{S}_q\mathbf{S}_Q\right)}{9\sqrt{\pi}\,m_q\,m_Q}\sum_{k=1}^{7}\alpha_k\,\tau_k^3\,\exp(-\tau_k^2\mathrm{r}^2) ,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $1/\tau_k^2 = 1/\gamma_k^2 + 1/b^2$, $\mathrm{erf}(x)$ – функция ошибок, а $\mathbf{S}_{q,\,Q}$ - операторы спинов кварков. Появление параметра w_0 обусловлено ненулевыми значениями глюонных и кварковых конденсатов.

Для получения потенциала (3) применена процедура "размазки" [17] с параметром b по рецепту

$$\tilde{f}(r) = \frac{b^3}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{d}\mathbf{r}'\exp\left[-b\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)^2\right]f\left(r'\right) \tag{4}$$

и феноменологическое описание поведения бегущей константы сильного взаимодействия, удобное для аналитических расчетов [17]:

$$\alpha_s(Q^2) = \sum_{k=1}^{n=7}\alpha_k\exp\left[-Q^2/\left(4\gamma_k^2\right)\right] . \tag{5}$$

Фиксация параметров межкваркового потенциала пуанкаре-ковариантной модели для псевдоскалярных и векторных мезонов была решена вариационным методом с пробными ВФ трехмерного гармонического осциллятора:

$$\Phi^{(N)}_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\mathbf{k},\beta\right) = \delta_{\lambda_1,-\lambda_2}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{2}}\phi_{N,\,\ell=0}\left(\mathbf{k},\beta\right) , \tag{6}$$

где

$$\phi_{N,\,\ell}\left(\mathbf{k},\beta\right) = \sqrt{\frac{2N!}{\beta^3\Gamma(N+\ell+3/2)}}\exp\left(-\frac{k^2}{2\beta^2}\right)\left(\frac{k}{\beta}\right)^{\ell}Y_{\ell m}\left(\hat{\mathbf{k}}\right)L_N^{\ell+1/2}\left(\frac{k^2}{\beta^2}\right) . \tag{7}$$

Здесь $L_n^a(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра, $Y_{lm}\left(\hat{\mathbf{k}}\right) = Y_{\ell,m}\left(\theta_k, \varphi_k\right)$ – сферические функции.

Параметры, необходимые для вычисления среднеквадратичных радиусов в случае $\pi^{\pm}$–мезонов, имеют следующие значения:

$$\beta_{\pi^\pm} = 371.132 \pm 6.478 \text{ МэВ}, m_u = 120.0 \pm 2.3 \text{ МэВ}, m_d = 363.3 \pm 7.0 \text{ МэВ} . \qquad (8)$$

Аналогично для $K^{\pm}$–мезонов имеем:

$$\beta_{K^\pm} = 395.178 \pm 8.461 \text{ МэВ} , m_s = 773.4 \pm 86.9 \text{ МэВ} . \qquad (9)$$

Параметры (8) и (9) получены в пуанкаре-ковариантной модели мезонов исходя из требования самосогласованного описания лептонных констант распадов и спектра масс соответствующих псевдоскалярных и векторных мезонов [15].

2 Электромагнитные радиусы псевдоскалярных мезонов в пуанкаре-ковариантной модели

В вершина взаимодействия виртуального фотона псевдоскалярного мезона определяется посредством

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu &= {}_{\text{out}}\left\langle Q'\right| J_\mu^h(0)\left|Q\right\rangle_{\text{in}} = \\ &= \frac{F_P(t)\left(Q+Q'\right)_\mu}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega_M(\mathrm{Q})\,\omega_M(\mathrm{Q}')}} = \frac{F_P(t)\left(V_Q+V_{Q'}\right)_\mu}{(2\pi)^3\sqrt{4V_0V_0'}}\ ,\quad t = -\left(Q'-Q\right)^2 \ . \end{aligned} \qquad (10)$$

Ток $\mathcal{J}_\mu$ рассчитывается в рамках точечной формы РГД с учетом кварковой структуры состояний $|Q\rangle_{\text{in,out}}$ в импульсном приближении. При этом учтем поправки, связанные с сильными взаимодействиями посредством форм-факторов кварков $f_{q,Q}(t)$ [7, 18]:

$$f_q(t) = \frac{1}{1+\ln\left(1+\left\langle r_q^2\right\rangle t/6\right)} \ , \qquad (11)$$

где $\left\langle r_q^2\right\rangle$ – среднеквадратичный радиус кварка, который выберем в виде [18]

$$\left\langle r_q^2\right\rangle = \frac{a}{m_q^2} \qquad (12)$$

с универсальным параметром a для ароматов кварков. После вычисления форм-фактор псевдоскалярного мезона $F_P(t)$ в пуанкаре-ковариантной модели, основанной на точечной форме РГД, запишется в виде:

$$\begin{aligned} F_P(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^\infty \mathrm{dk}\,\mathrm{k}^2 \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\left(\cos\theta_k\right)\ \Phi(\mathrm{k})\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(\mathrm{k})\,\omega_{m_Q}(\mathrm{k})}}\ e_q f_q(t)\ \times \\ \times\left[\frac{\Phi^*(\mathrm{k}_2)}{\sqrt{(\varpi_2+1)}}\sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(\mathrm{k}_2)}{\omega_{m_q}(\mathrm{k}_2)}}\frac{h_2\left(\mathrm{k},\ \cos\theta_k,\ \varpi_2\right)}{\sqrt{\omega_{m_q}(\mathrm{k})+m_q}\ \sqrt{\omega_{m_q}(\mathrm{k}_2)+m_q}}\right] + e_Q f_Q(t)\ \times \\ \times\left[\frac{\Phi^*(\mathrm{k}_1)}{\sqrt{(\varpi_1+1)}}\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\mathrm{k}_1)}{\omega_{m_Q}(\mathrm{k}_1)}}\frac{h_1\left(\mathrm{k},\ \cos\theta_k,\ \varpi_1\right)}{\sqrt{\omega_{m_Q}(\mathrm{k})+m_Q}\ \sqrt{\omega_{m_Q}(\mathrm{k}_1)+m_Q}}\right],\ \text{ где} \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\varpi_{1,2} = \varpi_{12}\Big|_{\mathbf{k}'=\mathbf{k}_{1,2}} \approx 1 + t\frac{\omega^2_{m_{q,Q}}(\mathrm{k})}{\left(\mathrm{k}^2 x^2 - \omega^2_{m_{q,Q}}(\mathrm{k})\right)\left(\omega_{m_q}(\mathrm{k}) + \omega_{m_Q}(\mathrm{k})\right)} \tag{14}$$

$$h_1(\mathrm{k}, \cos\theta_k, \varpi_1) = \mathrm{k}\left(-\mathrm{k}\cos\theta_k(\varpi_1 - 1) + \omega_{m_Q}(\mathrm{k})\sqrt{\varpi_1^2 - 1}\right) \times$$
$$\times \cos(\theta_k - \alpha_{W_2}) + \cos\alpha_{W_1}\left(\omega_{m_Q}(\mathrm{k}) + m_Q\right)\left(\omega_{m_Q}(\mathrm{k}) + \omega_{m_Q}(\mathrm{k}_1)\right), \tag{15}$$

$$h_2(\mathrm{k}, \cos\theta_k, \varpi_2) = -\mathrm{k}\left(\mathrm{k}\cos\theta_k(\varpi_2 - 1) + \omega_{m_q}(\mathrm{k})\sqrt{\varpi_2^2 - 1}\right) \times$$
$$\times \cos(\theta_k + \alpha_{W_2}) + \cos\alpha_{W_2}\left(\omega_{m_q}(\mathrm{k}) + m_q\right)\left(\omega_{m_q}(\mathrm{k}) + \omega_{m_q}(\mathrm{k}_2)\right) \tag{16}$$

с тригонометрическими функциями от углов вигнеровских вращений

$$\cos\alpha_{W_1} = z_{+1}(1)\left(1 + v_{Q_1}\mathrm{u}_{k_1}\cos\theta_k\right),\ \sin\alpha_{W_1} = z_{+1}(1)\left(1 + v_{Q_1}\mathrm{u}_{k_1}\sin\theta_k\right),$$

$$\cos\alpha_{W_2} = z_{-1}(2)\left|1 - v_{Q_2}\mathrm{u}_{k_2}\cos\theta_k\right|,\ \sin\alpha_{W_2} = z_{-1}(2)\left(1 + v_{Q_2}\mathrm{u}_{k_2}\sin\theta_k\right),$$

$$z_\lambda(n) = 1/\sqrt{1 + 2\lambda\, v_{Q_n}\mathrm{u}_{k_n}\cos\theta_k + v^2_{Q_n}\mathrm{u}^2_{k_n}},\ (\lambda = \pm 1, n = 1, 2),$$

$$v_{Q_{1,2}} = \sqrt{\frac{\varpi_{1,2} - 1}{\varpi_{1,2} + 1}}.$$

Для определения среднеквадратичного радиуса используем определение

$$F_P(t) \approx 1 - \left\langle r_P^2\right\rangle \frac{t}{6}. \tag{17}$$

При расчете форм-факторов остается только один свободный параметр a, для которого в случае заряженного пиона с параметрами (8) получим

$$\left\langle r_\pi^2\right\rangle = \frac{2}{3}\left\langle r_u^2\right\rangle + \frac{1}{3}\left\langle r_d^2\right\rangle + 0.353\ \text{Фм}^2 = \frac{a}{3}\left(\frac{2}{m_u^2} + \frac{1}{m_d^2}\right) + 0.353\ \text{Фм}^2. \tag{18}$$

Из (18) находим, что $a = 0.033 \pm 0.010$. Тогда среднеквадратичный радиус π-мезона

$$\left\langle r^2_{\pi^\pm}\right\rangle = \left(0.416^{+0.035}_{-0.033}\right)\ \text{Фм}^2 \tag{19}$$

находится в доверительном интервале средневзвешенного значения, полученного в результате исследований реакции $e^- + \pi \to e^- + \pi$ [19, 20]

$$\left\langle r^2_{\pi^\pm}\right\rangle_{exp} = (0.439 \pm 0.07)\ \text{Фм}^2. \tag{20}$$

Вычисление среднеквадратичного радиуса $K^\pm$—мезона с использованием соотношения (17) и параметров (9) дает, что

$$\left\langle r^2_{K^\pm}\right\rangle = \left(0.355^{+0.038}_{-0.035}\right)\ \text{Фм}^2. \tag{21}$$

Модельный расчет полностью лежит в экспериментальном доверительном интервале [21]:

$$\left\langle r^2_{K^\pm}\right\rangle_{exp} = (0.34 \pm 0.05)\ \text{Фм}^2, \tag{22}$$

но значительно выше среднего значения полученного в [22]: $\langle r^2_{K^\pm}\rangle_{exp} = (0.28 \pm 0.05)$ Фм^2 .

Вычисления для K^0–мезона. аналогичные расчетам радиусов заряженных пионов и каонов, дают, что

$$\langle r^2_{K^0}\rangle = (-0.037 \pm 0.002) \text{ Фм}^2 . \tag{23}$$

Значение (23) не противоречит данным [23]: $\langle r^2_{K^0}\rangle_{exp} = (-0.054 \pm 0.026)$ Фм^2 , хотя и больше чем результат, полученный при анализе реакции $K_L \to \pi^+\pi^-e^+e^-$ [24]: $\langle r^2_{K^0}\rangle_{exp} = (-0.076 \pm 0.021)$ Фм^2 .

Таким образом, в рамках пуанкаре-ковариантной модели, основанной на точечной форме РГД, получено согласованное описание масс, лептонных констант и среднеквадратичных радиусов псевдоскалярных мезонов. При этом, результаты расчетов удовлетворительно согласуются с современными экспериментальными данными.

Abstract. Abstract. Within the bounds of Poincaré-covariant model mean-square radii of pseudo-scalar mes-ons with the account of correspondence of model calculations of lepton constants and masses to ex-perimental values are calculated.

Литература

1. F. Cardarelli, I. L. Grach, I. M. Narodetskii [et al.] // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 6682–6685.

2. F. Cardarelli, I. L. Grach, I. M. Narodetskii [et al.] // Phys. Lett. — 1995. — Vol. B349. — P. 393–399.

3. F. Coester, W. N. Polyzou // Phys. Rev. — 2005. — Vol. C71. — P. 028202.

4. F. Coester, W. N. Polyzou. [Electronic resource]— 2004. — Mode of access: http: //arxiv.org /pdf/ nucl-th/0405082. — Date of access: 14.01. 2008.

5. W. Jaus // Phys. Rev. — 1991. — Vol. D44. — P. 2851–2859.

6. F. Schlumpf // Phys. Rev. — 1994. — Vol. D50. — P. 6895–6898.

7. А. Ф. Крутов // ЯФ. — 1997. — Т. 60, № 8.— С. 1442–1450.

8. A. F. Krutov, V. E. Troitsky // Phys. Rev. C. — 2002. — P. 045501.

9. T. W. Allen, W. H. Klink // Phys. Rev. — 1998. — Vol. C58. — P. 3670–3673.

10. B. Desplanques // Int. J. Mod. Phys.— 2005. — Vol. A20. — P. 1601–1606.

11. B. Desplanques, L. Theussl // Eur. Phys. J. — 2004. — Vol. A21. — P. 93.

12. B. Desplanques,L. Theussl, S. Noguera // Phys. Rev. — 2002. — Vol. C65. — P. 038202.

13. L. Theussl, A. Amghar, B. Desplanques, S. Noguera // Few Body Syst. Suppl. — 2003. — Vol. 14. — P. 393.

14. B. Desplanques // Nucl. Phys. — 2005. — Vol. A755. — P. 303–306.

15. Андреев, В. В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / Гомель: УО "Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины", 2008. — 294 с.

16. B. D. Keister, W. N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. — 1991. — Vol. 20. — P. 225–479.

17. S. Godfrey, N. Isgur // Phys. Rev. — 1985. — Vol. D32. — P. 189–231.

18. A. F. Krutov, V. E. Troitsky/ [Electronic resource]— 2003. — Mode of access: http: //arxiv.org /pdf/ hep-ph/0307217. — Date of access: 18.03. 2004.

19. S. R. Amendolia [et al.] // Nucl. Phys. — 1986. — Vol. B277. — P. 168–216.

20. I. Eschrich [et al.] // Phys. Lett. — 2001. — Vol. B522. — P. 233–239.

21. S. R. Amendolia [et al.] // Phys. Lett. — 1986. — Vol. B178. — P. 435–454.
22. E. B. Dally [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45. — P. 232–235.
23. W. R. Molzon [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1978. — Vol. 41. — P. 1213.
24. A. Lai [et al.] // Eur. Phys. J. — 2003. — Vol. C30. — P. 33–49.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.06.09