Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(56), 2009

УДК 512.542

Разрешимые приводимые локальные формации p-разложимого дефекта 3

В. В. Аниськов

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны, при необходимости их можно найти в [1-2]. Напомним только те из них, которые для данной работы являются основными.

Группа называется p-разложимой, если она одновременно обладает нормальной силовской p-подгруппой и нормальной холловой p'-подгруппой. Класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, называется формацией. Локальным экраном f называется такое отображение класса $\mathfrak{G}$ всех групп в класс формаций, что выполняются следующие условия:

1) $f(1) = \mathfrak{G}$;

2) $f(A) = f(B)$, если A и B — произвольные неединичные p-группы для некоторого простого числа p;

3) $f(G) = \cap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой неединичной группы G.

Формация называется локальной, если она обладает хотя бы одним локальным экраном. Минимальной локальной не p-разложимой формацией называется такая формация, которая сама не содержится в классе всех p-разложимых групп, но все ее собственные локальные подформации в этот класс входят. Совокупность всех локальных подформаций локальной формации $\mathfrak{F}$ рассматривается как решетка, при этом под объединением $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ локальных подформаций $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ понимается наименьшая локальная подформация из $\mathfrak{F}$, содержащая обе эти подформации. Для любого непустого класса групп $\mathfrak{H}$ и любой локальной формации $\mathfrak{F}$ длина решетки локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{H}$-дефектом локальной формации $\mathfrak{F}$. Формация называется приводимой, если она может быть представлена в виде объединения своих собственных локальных подформаций.

В теореме 2 работы [3] получено описание разрешимых приводимых локальных формаций с $\mathfrak{H}$-дефектом 2, если $\mathfrak{H}$ — произвольная локальная формация, обладающая таким локальным экраном, все непустые значения которого — локальные формации. Поскольку к таким формациям относится и формация всех p-разложимых групп, то указанная теорема описывает в том числе и разрешимые приводимые локальные формации p-разложимого дефекта 2. В данной работе описываются разрешимые приводимые локальные формации, у которых p-разложимый дефект равен 3. Для класса всех p-разложимых групп используется обозначение $\mathfrak{N}_p$.

Сформулируем вначале несколько вспомогательных утверждений, доказанных автором в [4].

Лемма 1. *В формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные не p-разложимые формации, а $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p-разложимая формация, не существует других минимальных локальных не p-разложимых формаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$.*

Лемма 2. *В разрешимой формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p-разложимая формация, существует единственная минимальная локальная не p-разложимая формация.*

Лемма 3. *В разрешимой формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ — некоторая неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p-разложимая формация, не существует других неприводимых локальных формаций p-разложимого дефекта 2, кроме формации $\mathfrak{H}_1$.*

Результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть p — некоторое простое число, $\mathfrak{F}$ — разрешимая приводимая локальная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ имеет p-разложимый дефект 3, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p-разложимая формация, а формация $\mathfrak{H}$ удовлетворяет одному из условий:*

1) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$ — различные минимальные локальные не p-разложимые формации;

2) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ — некоторая неприводимая локальная формация с p-разложимым дефектом 2, а $\mathfrak{H}_2$ — минимальная локальная не p-разложимая формация, не входящая в $\mathfrak{H}_1$;

3) $\mathfrak{H}$ — некоторая неприводимая локальная формация с p-разложимым дефектом 3;

4) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — различные неприводимые локальные формации с p-разложимым дефектом 2 такие, что $\mathfrak{H}_1 \bigcap \mathfrak{H}_2$ — локальная формация с p-разложимым дефектом 1.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая разрешимая локальная формация p-разложимого дефекта 3. По определению p-разложимого дефекта, в $\mathfrak{F}$ существует некоторая максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_1$, у которой p-разложимый дефект равен 2. Согласно теореме 2 из [3], возможны 2 случая:

1) $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные не p-разложимые формации, а $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p-разложимая формация;

2) $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p-разложимая формация.

Пусть формация $\mathfrak{F}_1$ удовлетворяет первому условию. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ существует еще одна минимальная локальная не p-разложимая формация $\mathfrak{H}_3$, которая отлична от формаций $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Согласно лемме 1, формация $\mathfrak{H}_3$ не содержится в $\mathfrak{F}_1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{H}_3 \vee_l \mathfrak{M}$, и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь в $\mathfrak{F}$ не содержится других минимальных локальных не p-разложимых формаций, кроме $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Выберем группу G из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$. Тогда $\mathfrak{F} = lformG \vee_l \mathfrak{F}_1$, поскольку $\mathfrak{F}$ — приводимая формация. Если $lformG$ — формация p-разложимых групп, то, согласно теореме 2 из [3], формация $\mathfrak{F}$ имеет p-разложимый дефект 2. Поэтому $\mathfrak{H}_1 \subseteq lformG$ или $\mathfrak{H}_2 \subseteq lformG$. Пусть, например, $\mathfrak{H}_1 \subseteq lformG$. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq lformG$. Тогда получим $\mathfrak{F} = lformG \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$. Согласно леммам 20.3 и 20.4 из [2], p-разложимый дефект формации $lformG$ может быть либо 2, либо 3. Если этот дефект равен 3, то в $lformG$ существует максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}^*$, у которой p-разложимый дефект равен 2. Ввиду рассматриваемого случая, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация с p-разложимым дефектом 2, а $\mathfrak{M}_1$ — некоторая локальная p-разложимая формация. Понятно, что $\mathfrak{F} = lformG \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cup \mathfrak{N}_p)$. Рассмотрим решеточный изоморфизм

$$lformG \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p)/_l \mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p \simeq lformG/_l(lformG \cap \mathfrak{N}_p).$$

Согласно лемме 20.2 из [2], $|lformG : (lformG \cap \mathfrak{N}_p)| = 3$. С другой стороны, $|\mathfrak{F} : (\mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p))| = 3$, $|(\mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p)) : (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p)| = 1$. Получаем противоречие. Следовательно, наше предположение о том, что p-разложимый дефект формации $lformG$ равен

3, неверно, и поэтому остается заключить, что ее p-разложимый дефект равен 2. Если $lformG$ неприводима, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы. Если же $lformG$ приводима, то в нашем случае $lformG = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация с p-разложимым дефектом 2, а $\mathfrak{M}_1$ — некоторая локальная p-разложимая формация. Следовательно, поскольку $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p)$, и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathfrak{H}_2 \subseteq lformG$. Тогда $\mathfrak{F} = lformG \vee_l \mathfrak{M}$. Снова воспользовавшись леммами 20.3 и 20.4 из [2], легко убеждаемся, что p-разложимый дефект формации $lformG$ равен 3. Если $lformG$ — неприводимая формация, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3) теоремы. Пусть $lformG$ приводима. Тогда в ней существует такая максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_2$, что ее p-разложимый дефект равен 2. Предположим, что $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а $\mathfrak{M}$ — некоторая p-разложимая локальная формация. Тогда, согласно лемме 2, $lformG = \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}_2$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p)$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Допустим теперь, что $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{M}_2$ — упомянутые выше локальные формации. Выберем группу $G_1 \in lformG \setminus \mathfrak{F}_2$. Тогда $\mathfrak{F} = lformG_1 \vee_l (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_p)$. Совершим теперь такие же рассуждения, как и для формации $lformG$. Тогда либо $\mathfrak{F}$ будет удовлетворять одному из условий теоремы, либо $lformG_1$ окажется такой же, как и формация $lformG$. Выберем аналогично группу G_2 и т.д. В результате мы получим цепь приводимых локальных формаций с p-разложимым дефектом 3:

$$lformG_1 \supset lformG_2 \supset \ldots$$

Этой цепи будет соответствовать цепь

$$\mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_3 \supset \mathfrak{M}_4 \ldots .$$

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ разрешима, то последняя цепь конечна. Согласно решеточному изоморфизму

$$(\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1)/_l \mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{M}/_l (\mathfrak{M} \vee_l \cap \mathfrak{H}_1),$$

будет конечной цепь

$$\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_3 \supset \ldots \supset \mathfrak{F}_s = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2.$$

Поэтому, ввиду модулярности решетки локальных формаций, найдется такое натуральное число m, что $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ — максимальная локальная подформация формации $lformG_m$. Кроме того, нетрудно показать, что эта подформация является единственной. Приходим к противоречию с нашим предположением. Значит, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3) теоремы.

Пусть теперь в формации $\mathfrak{F}$ не существует максимальной локальной подформации p-разложимого дефекта 2 вида 1). Тогда в ней найдется максимальная локальная подформация p-разложимого дефекта 2 вида 2), т. е. $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а $\mathfrak{M}_1$ — p-разложимая локальная формация. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ существует некоторая минимальная локальная не p-разложимая формация $\mathfrak{H}_2$, которая не входит в формацию $\mathfrak{H}_1$. Тогда, поскольку формация $\mathfrak{F}$ приводима, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}_1$, и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть теперь в формации $\mathfrak{F}$ содержится единственная минимальная локальная не p-разложимая формация. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ содержится некоторая неприводимая локальная формация $\mathfrak{H}_2$, у которой p-разложимый дефект равен 2. Тогда, согласно лемме 3, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}_1$. При этом, поскольку единственная минимальная локальная не p-разложимая формация $\mathfrak{H}_3$ содержится как в $\mathfrak{H}_1$, так и в $\mathfrak{H}_2$, то очевидно, что $\mathfrak{H}_3 \subseteq \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$. Поскольку обе эти формации обладают единственной максимальной локальной подформацией, то легко убедиться, что $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ — локальная формация p-разложимого дефекта 1. Следовательно, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4) теоремы.

Пусть теперь в формации $\mathfrak{F}$ не существует других неприводимых локальных формаций с p-разложимым дефектом 2, кроме $\mathfrak{H}_1$. Тогда, применив такие же, как и выше, рассуждения, мы либо получим, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3) теоремы, либо получим цепь формаций

$$lformG_1 \supset lformG_2 \supset \dots,$$

которая в итоге оборвется неприводимой локальной формацией. Доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Используя леммы 20.3 и 20.4 из [2], легко установить, что в каждом из четырех условий теоремы $\mathfrak{F}$ является приводимой локальной формацией с p-разложимым дефектом 3.

Теорема доказана.

Abstract. In the paper reducible local formations of finite soluble groups with p-decomposable defect 3 are studied.

Литература

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп // Москва: Наука, 1978.

2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем // Москва: Наука, 1989.

3. Аниськов В.В. О приводимых локальных формациях с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом // Весці АН Беларусі.— 1997 — № 4.— С. 65–68.

4. Аниськов В.В. О приводимых локальных формациях p-разложимого дефекта 3 // Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, препринт, 2008. — № 21, 14 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 20.03.09