Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(56), 2009

УДК 512.567.5

Полуабелевость, гомотетия и симметрия в n-арных группах

Ю. И. Кулаженко

Введение. Рассматривается n-арная группа $G = \langle X, (\ ), ^{[-2]}\rangle$. Элементы этой группы называют точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a. k-Угольником G называют последовательность k элементов из X. Четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$, для которого выполняется равенство

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c) = d,$$

называют параллелограммом G. n-Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ выполняется равенство

$$(x_1x_2^{n-1}x_n) = (x_nx_2^{n-1}x_1).$$

Целью данной работы является установление новых критериев полуабелевости n-арной группы G, выраженных через свойства последовательностей симметрий точек. Отметим, что теоремы 1, 3 являются n-арными аналогами, устанавливающими соответствующие свойства симметричных точек при гомотетии, а теорема 2 устанавливает связь между отражениями от точек и параллельным переносом.

Используемые понятия и обозначения можно найти в [1–4].

Изложим теперь полученные результаты.

Предложение 1. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, p \in X$ выполняется равенство*

$$(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(S_c(p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,p)) = ((S_c(p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c). \tag{1}$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (1) выполняется для любых $a, b, c, p \in X$. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

С учетом определения 4 из [1] симметричных точек, перепишем равенство (1) в виде

$$(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,p) = ((cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c). \tag{2}$$

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in X^n$. Учитывая то, что $x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}$, $x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}$ — нейтральные $2(n-1)$-последовательности, и равенство (2), имеем

$$\begin{aligned}
(x_1^n) &= (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_1^n)) = \\
&= (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_1^n)) = \\
&= ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_1^n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_1) = \\
&= (x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_1)x_2^{n-1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_1)) = \\
&= (x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_1x_2^{n-1}x_1) = (x_nx_2^{n-1}x_1).
\end{aligned}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Следовательно, мы показали, что

$$(x_1^n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

На основании определения полуабелевой n-арной группы заключаем, что G — полуабелева.

2. Если G — полуабелева n-арная группа, то справедливость равенства (1) следует из предложения 4 из [2].

Теорема 1. *Пусть G — n-арная группа. Тогда:*

1) если G — полуабелева n-арная группа, то для любых точек a, b, c, p из X справедливы равенства

$$S_{S_c(a)}(p) = S_{S_c(p)}(S_a(p)), \tag{3}$$

$$S_{S_c(b)}(p) = S_{S_c(p)}(S_b(p)), \tag{4}$$

$$S_{S_a(b)}(p) = S_{S_a(p)}(S_b(p)), \tag{5}$$

$$S_{S_a(c)}(p) = S_{S_a(p)}(S_c(p)), \tag{6}$$

2) если для любых точек a, b, c, p из X хотя бы одно из указанных равенств выполняется, то G — полуабелева n-арная группа.

Доказательство. 1. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (3).

Рассмотрим правую часть этого равенства с учетом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [3], предложения 1 из [4]. Имеем

$$S_{S_c(p)}(S_a(p)) = (S_c(p)(S_a(p))^{[-2]} \underbrace{S_a(p)\dots S_c(p)}_{2n-4}) =$$

$$= ((cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]} \underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\dots(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)}_{2n-4}) =$$

$$= ((cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)) =$$

$$= (cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c) =$$

$$= (cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c) =$$

$$= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c))) =$$

$$= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c) =$$

$$= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)) = (S_c(a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_c(a)) = S_{S_c(a)}(p).$$

Тем самым равенство (1) установлено.

Равенства (4)–(6) устанавливаются аналогично.

2. Пусть выполняется равенство (3). Докажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Преобразуем обе части равенства (3) с учетом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [3], предложения 1 из [4] и того, что для любого $x \in X$ последовательности $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ и $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ являются нейтральными $2(n-1)$-последовательностями. Имеем

$$S_{S_c(a)}(p) = S_{S_c(p)}(S_a(p))$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

или

$$(S_c(a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_c(a)) = (S_c(p)(S_a(p))^{[-2]}\underbrace{S_a(p)\ldots}_{2n-4}S_c(p)),$$

или

$$((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)) = (S_c(p)(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}S_c(p)),$$

или

$$ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}((cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}p) = (S_c(p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c),$$

или

$$(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(S_c(p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}p)) = ((S_c(p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}p)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c). \tag{7}$$

С учетом равенства (7) и на основании предложения 1 заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Аналогично можно установить свойство полуабелевости G, если выполняется любое из равенств (4)–(6).

Теорема доказана.

Предложение 2. n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$ выполняется равенство

$$(bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}a) = (ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \tag{8}$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (8) выполняется для любых $a, b, c, d \in X$. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in X^n$. Учитывая равенство (8) и то, что $x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}$ и $x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}$ — нейтральные $2(n-1)$-последовательности, имеем

$$\begin{aligned}(x_1^n) &= (x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_n) = (x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1) = \\ &= ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1)x_2^{n-1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1)) = (x_nx_2^{n-1}x_1).\end{aligned}$$

На основании определения заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Если G-полуабелева n-арная группа, то справедливость равенства (8) следует из предложения 4 из [2].

Предложение доказано.

Теорема 2. *n-Арная группа G тогда и только тогда будет полуабелевой, когда для любых $a, b, c, d \in X$ четырехугольник $\langle S_a(d), S_a(c), S_b(c), S_b(d)\rangle$ — параллелограмм G.*

Доказательство. 1. Пусть G-полуабелева группа. Покажем, что $\langle S_a(d), S_a(c), S_b(c), S_b(d)$ — параллелограмм G.

Поскольку

$$\begin{aligned}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}S_a(c)) &= (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) = \\ &= ((cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) = ((ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) = \\ &= (ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) = (ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}a) = S_a(d),\end{aligned}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

то на основании определения 2 из [1] заключаем, что четырехугольник $\langle c, d, S_a(c), S_a(d)\rangle$ — параллелограмм G.

Установим, что четырехугольник $\langle c, d, S_b(c), S_b(d)\rangle$ — параллелограмм G. Имеем

$$(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}S_b(c)) = (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) =$$
$$= ((cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = ((bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$
$$= (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b) = S_b(d).$$

На основании определения 2 из [1] заключаем, что четырехугольник $\langle c, d, S_b(c), S_b(d)\rangle$ — параллелограмм G. С учетом того, что четырехугольники $\langle c, d, S_a(c), S_a(d)\rangle$, $\langle c, d, S_b(c), S_b(d)\rangle$ — параллелограммы G, на основании предложения 3 из [1] заключаем, что

$$\langle S_a(d), S_a(c), S_b(c), S_b(d)\rangle$$

— параллелограмм G.

2. Докажем, что n-арная группа G обладает свойствами полуабелевости, если четырехугольник

$$\langle S_a(d), S_a(c), S_b(c), S_b(d)\rangle$$

— параллелограмм G.

На основании определения 2 из [1] имеем

$$(S_a(d)(S_a(c))^{[-2]}\underbrace{S_a(c)\ldots}_{2n-4}S_b(c)) = S_b(d).$$

Преобразуем это равенство, с учетом определения 4 из [1]. Имеем

$$((ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}a)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b).$$

Применяя к последнему равенству равенство 3.28 из [3], имеем

$$(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b).$$

Откуда, с учетом нейтральности последовательности $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ для любого $x \in X$, имеем

$$(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)$$

или

$$(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c),$$

или

$$(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}a).$$

Из последнего равенства и на основании предложения 2 заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Теорема доказана.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 3. *Пусть a, b, c — произвольные точки из X, а точка d из X такая, что четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G. n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$S_d(S_b(a)) = S_c(a). \tag{9}$$

Доказательство. 1. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (9).

С учетом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [3] и того, что $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G (а значит, справедливы равенства

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) = c, \qquad (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b) = a, \qquad (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c) = d),$$

имеем

$$S_d(S_b(a)) = (d(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots}_{2n-4}d) =$$

$$= (d(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}d) =$$

$$= (db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) = (db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) =$$

$$= (db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = ((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) =$$

$$= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c) = S_c(a).$$

2. Пусть равенство (9) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Из (9) имеем

$$(d(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots}_{2n-4}d) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c),$$

или

$$(d(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}d) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c).$$

Отсюда получаем

$$(db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c),$$

или

$$((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c),$$

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c).$$

Из последнего равенства следует, что

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) = c,$$

или

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a) = c,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

или

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c).$$

В силу произвольности выбора точек $a, b, c \in X$ и на основании предложения 4 из [4] заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Теорема доказана.

Abstract. Abstract. New criteria of semi-commutativity of n-ary groups expressed through the properties of sequences of symmetries of points are presented in the paper.

Литература

1. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1998. — 182 с.

2. Кулаженко, Ю.И. Построение фигур аффинной геометрии на n-арной группе / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 65–82.

3. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1992. — 264 с.

4. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 47–64.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 03.09.09

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ