

УДК 629.113:539.621

О расчете напряженного состояния массивных шин на примере модели цилиндра из армированного материала с учетом элементов вязкоупругости

В. В. МОЖАРОВСКИЙ

Введение

Настоящая статья продолжает перечень начатых работ в области фундаментальных и прикладных исследований в направлении создания новых армированных материалов на основе современных полимеров и резин, работающих в сложных эксплуатационных условиях, в основном, касаясь применительно к движению автомобильных шин [1-12].

В данном случае представлена методика дальнейшего расчета контактного взаимодействия армированных материалов с учетом явления вязкоупругости, например, для резины, армированной кордом.

Актуальность исследуемой проблемы в научном и техническом мире очевидна. Ежегодно десятки статей и книг, а также диссертаций посвящены вопросам по этой проблеме. Так, например, в декабре 2007 г. в МГУ в г. Москве была успешно защищена диссертация Демидовичем П. Н. «Моделирование резинокорда с применением к задаче качения шины», в которой решаются задачи сравнительного анализа различных моделей резинокорда, применяемых в инженерной практике. В работе были рассмотрены две модели резинокорда: модель эффективного волокна, применяемая для определения «плоских» модулей резинокорда, и модель эффективного слоя, которая используется при моделировании качения шины. Однако такие явления, как вязкоупругость матрицы (резины), которая вызывает гистерезисные потери в работе, не учтены. Если корд обладает явно выраженными упругими свойствами, то для резины необходимо учитывать влияния фактора времени на изменения механических характеристик материала.

На данном этапе необходимо строгое описание эффективных свойств резинокорда на основе методики осреднения; построение экспериментально-расчетной методики определения упругих модулей резинокордных пластин и реализация контактной задачи.

В книге [1] предложен подход расчета контактного взаимодействия вязкоупругих слоистых цилиндрических изотропных тел, дано экспериментальное подтверждение правильности разработанной методики. В работе предлагается применить методику расчета взаимодействия для ортотропных цилиндрических тел, определить изменение параметров контакта.

Постановка задачи контакта цилиндрического индентора с ортотропным покрытием с учетом вязкоупругости

Исследование явлений вязкоупругости для ортотропного цилиндра необходимо для математического моделирования технической задачи контактного взаимодействия шины колеса с дорожным покрытием. В дальнейшем для создания разработок в области технических расчетов используем фундаментальные подходы и теоретические методики, представленные в предыдущих статьях и в других научных изданиях.

Известно, что вязкоупругие свойства покрытий из композиционных материалов проявляются в основном за счет входящих в композит полимерных компонентов (полимерной матрицы, волокон). В значительной степени на ползучесть влияет напряженное состояние, направление действия нагрузки. Так, если в основном направление действия нагрузки не сов-

падает с направлением волокон, то проявляются вязкоупругие свойства полимерной матрицы. Если же направление действия нагрузки совпадает с направлением волокон армирования, то ползучесть весьма незначительна, которой в инженерных расчетах можно пренебречь.

Считаем, что композиционное покрытие описывается уравнениями теории упругости для ортотропного тела.

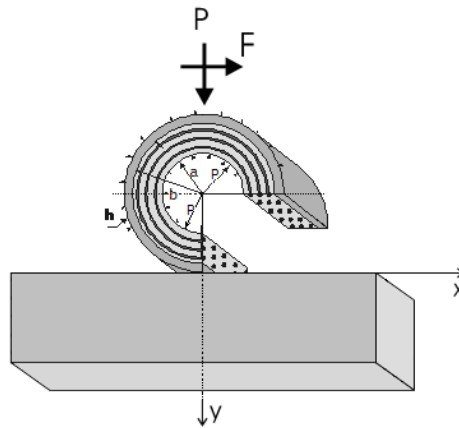


Рисунок 1 – Схема контакта

Армированный (композиционный) материал (рисунок 1) моделируем через так называемые эффективные модули упругости, используя оценки типа Ройса и Фойхта:

$$E_H = V_f E_f + (1 - V_f) E_M,$$

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_M},$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_{12M}},$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_M$$

или используя модель [3]

$$E_L = E_f V_f + E_M V_M,$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_M}{E_M} - V_f V_M \left(\frac{\nu_M}{E_M} - \frac{\nu_f}{E_f} \right)^2 \bigg/ \left(\frac{V_f}{E_M} + \frac{V_M}{E_f} \right),$$

$$\nu_L = \nu_f V_f + \nu_M V_M, \quad \nu_T = \nu_L E_T / E_L, \quad 1/G_{LT} = V_f / G_f + V_M / G_M,$$

V_f – объемная доля волокна в матрице композита; индексы L, T указывают продольное и поперечное направление волокна, а индексы f и M указывают объемное содержание волокна и матрицы в композите, соответственно E, G, ν – модули упругости и коэффициенты Пуассона в разных направлениях.

Эти оценки вполне согласуются с экспериментальными результатами для волокнистых композитов. Имеются и другие описания упругих свойств армированных шин колеса: уравнения Halpin-Tsai

$$E_L = E_f V_f + E_M (1 - V_f); \quad G_{LT} = \frac{G_M [G_f + G_M + (G_f - G_M) V_f]}{G_f + G_M - (G_f - G_M) V_f};$$

$$E_T = \frac{E_M (1 + 2V_f)}{1 - V_f}; \quad \nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_M (1 - V_f)$$

и формулы Gough-Tangorra

$$E_L = E_f V_f + E_M (1 - V_f); \quad G_{LT} = G_M (1 - V_f);$$

$$E_T = \frac{4E_M(1-V_f)[E_f V_f + E_M(1-V_f)]}{3E_f V_f + 4E_M(1-V_f)}; \quad \nu_{LT} = 0,5.$$

Индексы f и M обозначают корд (волокно) и резину (матрицу) соответственно. Модули задаются в системе координат, когда одна из осей направлена вдоль корда.

Упругие постоянные двухслойного перекрестно-армированного резинорядного композита можно определить с помощью теории [3]:

$$E_x = [E_L E_T (\sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) + (3/4)E_T^2] / (E_L \sin^4 \theta + E_T),$$

$$E_y = [E_L E_T (\sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) + (3/4)E_T^2] / (E_L \cos^4 \theta + E_T),$$

$$\nu_x = \frac{E_L \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (1/2)E_T}{E_L \sin^4 \theta + E_T},$$

$$\nu_y = \frac{E_L \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (1/2)E_T}{E_L \cos^4 \theta + E_T},$$

$$G_{xy} = E_L \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (1/4)E_T \cos^2 2\theta.$$

Здесь θ – угол расположения волокна корда.

Считаем, что упругие свойства армирующих волокон со временем изменяются незначительно; примем параметры E_f , V_f , G_f , как и в упругом случае постоянными, в то же время считаем, что полимерная матрица обладает вязкоупругими свойствами, которые можно, согласно принципу Вольтерра, описать с помощью интегральных операторов [1]. Ядра $R(t, \tau)$ и $K(t, \tau)$ зависят от разности аргументов $(t - \tau)$. Таким образом, для определения изменения напряженного состояния волокнистого покрытия со временем решаем задачу как упругую, а затем в окончательном решении заменяем упругие постоянные на операторы.

Алгебра интегральных операторов при решении задач теории вязкоупругости с использованием различных разностных ядер описана в [1]. Тогда напряженно-деформированное состояние ортотропной шины определяем из обобщенного закона Гука, например, для связи тензора напряжений с тензором деформаций в вязкоупругом случае. В частности, деформация ε и напряжение σ связаны следующей зависимостью:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (1 + \tilde{K}) \sigma;$$

$$\sigma = E(1 - \tilde{R}) \varepsilon,$$

где

$$\tilde{K} \sigma = E(t) \int_{t_0}^t K(t, \eta) \sigma(\eta) d\eta;$$

$$\tilde{R} \varepsilon = \frac{1}{E(t)} \int_{t_0}^t R(t, \eta) d\eta.$$

В то же время используется равенство:

$$\frac{1}{E} (1 + \tilde{K}) = [E(1 - \tilde{R})]^{-1},$$

то есть операторы ползучести и релаксации являются взаимно обратными. В нашем случае интегральными операторами будут \tilde{G} , $\frac{1}{\tilde{G}}$, $\tilde{\beta}$, например:

$$\tilde{G}(\cdot) = G_0 \left[1 + \int_0^t K(t, \tau)(\cdot) d\tau \right].$$

К расчету параметров контакта и напряжений в цилиндрическом ортотропном теле с учетом вязкоупругости

Так как область контакта малая, по сравнению с размерами шины колеса, то для приближенного инженерного решения допускается применение подхода о расчете давления, как на ортотропную полуплоскость (или на армированный слой).

Рассмотрим расчет напряжений в произвольной точке в ортотропном теле (в шине колеса) при действии на границе $y=0$ сосредоточенных усилий $p(s)ds$ в области контакта $[-a, a]$, которые определяются из [1], заменяя упругие постоянные, связанные с матрицей на операторы:

$$\sigma_x = \frac{y}{\pi(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2)} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\tilde{\beta}_1^2(x-s)^2 + y^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}_2^2(x-s)^2 + y^2} \right) p(s) ds;$$

$$\sigma_y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-y}{(\beta_1 - \beta_2)} \left[\frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}} - \frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}} \right] \cdot p(s) ds;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{\pi(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2)} \int_{x_1}^{x_2} (x-s) \left(\frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\tilde{\beta}_1^2}} - \frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\tilde{\beta}_2^2}} \right) p(s) ds;$$

$[x_1, x_2]$ – область изменения давления: $x_1 \leq s \leq x_2$; s – координата вдоль оси x относительно начала координат. Давление $p(s)$ считаем заданным и, в общем случае, зависящем как от координат, так и от времени. В случае постоянного давления решение представлено в работе [1]. Результаты расчета для массивной шины будут аналогичными представленными в [1] для изотропной полосы или экспериментальными

$$\tilde{S}_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\tilde{E}_1}, \quad \tilde{S}_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}}{\tilde{E}_1}, \quad \tilde{S}_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{\tilde{E}_2}, \quad \tilde{S}_{66} = \frac{1}{\tilde{G}_{12}},$$

где $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, j = 1, 2$;

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_x = \nu E_f + (1 - \nu)\tilde{E}_M;$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{E}_y = \frac{E_f \tilde{E}_M}{\nu \tilde{E}_M + (1 - \nu)E_f};$$

$$\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_M \frac{G_f(1 + \nu) + \tilde{G}_M(1 - \nu)}{G_f(1 - \nu) + \tilde{G}_M(1 + \nu)};$$

$$\nu_{12} = \nu_f \nu_f + (1 - \nu_f)\nu_M.$$

\tilde{E}_M, \tilde{G}_M – временные интегральные операторы, применяемые для модулей матрицы. Для решения поставленной задачи необходимо применить известные свойства действия на функцию из алгебры операторов.

Величину зоны контакта $2a$ определим по условию равновесия, например, из работы [1], затем, заменяя модули упругости на интегральные операторы, имеем:

$$a = \sqrt{\frac{2R}{\pi} \frac{1}{\tilde{m}} \cdot (P)},$$

где оператор имеет вид

$$\tilde{m} = \frac{1}{\left[(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) \tilde{S}_{12} \right]^{(1)} + \left[(\beta_1 + \beta_2) S_{22} \right]^{(2)}},$$

R – радиус контактирующего цилиндра, P – рас-
пределенная действующая сила. Упругие постоянные β_i , S_{ij} , ($i=1,2$) определяются из [1].
Напряженно-деформированное состояние определяется путем расчета вышеприведенных
интегралов при заданных упругих и временных факторах.

При определении параметров контакта (давления, размеры области контакта) исполь-
зуются характеристики материалов – объемное содержание волокна в матрице, модули упру-
гости, коэффициенты Пуассона, аналогично описанные в статье [12]. Качественная картина
напряжений будет аналогична результатам представленным в работах [1, 13] (Рисунок 2).

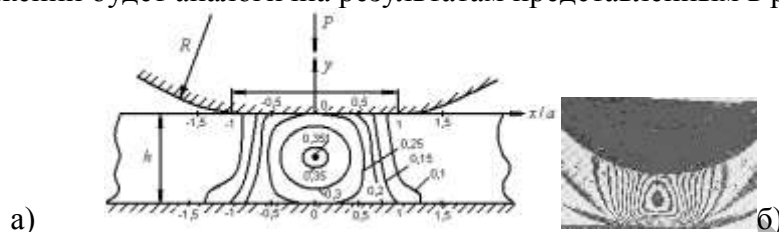


Рисунок 2 – Эпюры изохром: единица напряжений – P_0 : а) – расчет[1].; б) – экспери-
мент [13].

Для исследования контакта шины с дорогой принципиальное значение имеет описание
геометрии пятна контакта и силы взаимодействия шины с дорогой. В последнем случае мо-
дель должна быть трехмерной. Для наглядности на рисунке 3 показаны схематические рас-
четные и экспериментальные результаты. Более подробно описание методики проведения
эксперимента и расчета можно найти в работах [1, 6, 8, 12].

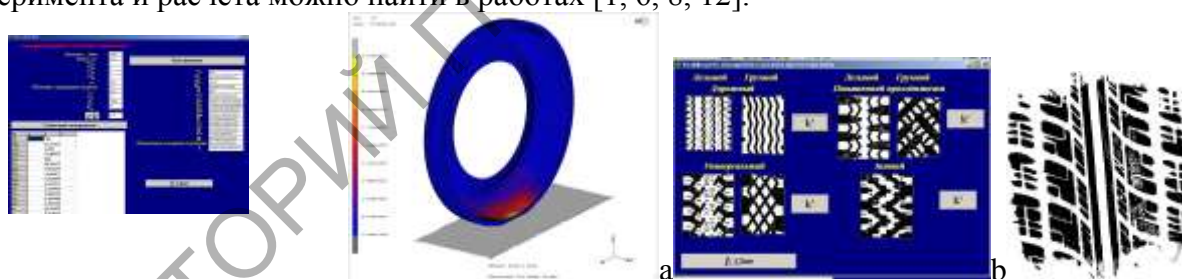


Рисунок 3 – Пример расчета контакта шины: а) – расчет; б) – эксперимент [12].

Использование данной модели позволило получить распределение напряжений и де-
формаций в колесе, как в области контакта, так и по всему объему шины.

Полученные результаты будут представлены в дальнейших статьях и могут быть в ис-
пользованы для расчета момента сопротивления качению шины

Заключение. В результате проведенных исследований представлена методика и под-
ход к расчету контактного взаимодействия цилиндрических тел применительно к стати-
ческому контакту массивных шин из композиционных материалов с учетом анизотропии, сло-
истости и вязкоупругости.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке в рамках научных
проектов совместного конкурса БРФФИ-ГФФИУ проект T09K-087.

Резюме. В статье представлена методика расчета контактного взаимодействия армирован-
ных материалов (резины) с учетом явления вязкоупругости.

Литература

- 1 Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Мн.: Наука и техника, 1988.
- 2 Мур, Д. Трение и смазка эластомеров / Д. Мур. – М.: «Химия», 1977.
- 3 Тканые конструкционные композиты / под ред. Т.В. Чу и Ф. Ко. – М.: Мир, 1991.
- 4 Определение сопротивления качению автомобильных шин в зависимости от условий эксплуатации. Ч.1. Методика многофакторного эксперимента / В.В. Можаровский [и др.] // Трение и износ. – 2007. – №2.
- 5 Можаровский, В.В. Математическое моделирование разрушения композитов при ударном нагружении / В.В. Можаровский, Ю.М. Плескачевский, Ю.Ф. Руба // Материалы, технологии, инструменты. – 1998. – №1. – С. 83-89.
- 6 Pleskachevsky, Yu.M. Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu.M. Pleskachevsky, V.V. Mozharovsky, Yu.F. Rouba // Proc. Int. Conf. Computational methods in contact mechanics III, Madrid, July 3-5, 1997. – Madrid, 1997. – P. 363-372.
- 7 Можаровский, В.В. Решение краевой задачи для неоднородной полосы под действием нормальных и касательных сил / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // Сборник "Математические проблемы механики неоднородных структур" / Институт прикладных проблем мех. и матем. им. Я.С. Подстригача. – Львов, 2000. – Т.1. – С. 291-293.
- 8 Можаровский, В.В. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // Материалы, технологии, инструменты. – 2000. – Т.5, № 2. – С. 5-10.
- 9 Можаровский, В.В. Контактное взаимодействие жесткого индентора с неоднородной ортотропной полосой / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская, С.Ю. Бабич // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута ім. Н. К. Крупскай. – 2001.- №5.- С. 3-8.
- 10 Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский [и др.] // Трение и износ. – 2001. – Т.22, №4. – С. 379-385.
- 11 Можаровский, В.В. Определение напряженно-деформированного состояния слоистых неоднородных тел / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // Научно-технический сборник "Теоретическая и прикладная механика" / Донецкий национальный университет – Харьков, 2001. – Вып. 34. – С. 3-9.
- 12 Можаровский, В.В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / С.В. Шилько [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: – Мн., 2007. – С. 135-142.
- 13 Изучение напряжений в массивных шинах. И.А. Морина, Б.Н.Ушаков и др. // Изв. ВУЗов. Машиностроение 1977, №8.-С.101-105.