Е. Д. Балаева
(*ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно*)

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОЙ ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ

Рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$f(x) = f(-x),\ x \in [-\pi, 0],\quad f(x) = f(x + 2\pi),\ x \in \mathbb{R}.$$

Функция $f(x)$ является непрерывной 2π-периодической на $\mathbb{R}$. Найдём её тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2(2k+1)x)}{(2k+1)^2}. \tag{1}$$

Так как функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема, то её ряд Фурье равномерно сходится к функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$. Запишем частичную сумму этого ряда

$$S_n(x) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\cos(2(2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

и исследуем равномерные приближения функции $f(x)$ частичными суммами $S_n(x)$. Доказано, что справедливо следующее предельное равенство:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\lim_{n\to\infty} n \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| = \frac{1}{2\pi}.$$

Далее, введём суммы Валле Пуссена для ряда (1),

$$\tau_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=n}^{2n-1} S_m(x).$$

В работе установлено, что для равномерных приближений функции $f(x)$ её суммами Валле Пуссена имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to\infty} n \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \tau_n(x)| = \frac{\ln 2}{2\pi}.$$

Таким образом, в работе получены точные асимптотические равенства для равномерных приближений одной периодической непрерывной функции частичными суммами её тригонометрического ряда Фурье и суммами Валле Пуссена.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ