А. В. Станкевич
(*ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно*)

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В теории интерполирования функций важную роль играют равноотстоящие узлы. В настоящем докладе предполагается рассмотреть одно обобщение этих узлов. Введем функцию

$$t_n(x) = \sin\left(n\int_0^x \frac{1-|\alpha|^2}{1-2|\alpha|\cos(x-\theta)+|\alpha|^2}\right)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < 1,\ \ \theta = \arg\alpha,\ \ \theta \in [0,2\pi)$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Функция $t_n(x)$ является тригонометрической рациональной порядка $2n$ следующего вида

$$t_n(x) = \frac{q_n(x)}{(1-2|\alpha|\cos(x-\theta)+|\alpha|^2)^n},$$

где $q_n(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка n.

Лемма 2. Функция $t_n(x)$ имеет $2n$ простых нулей $x_k, k = 0,1,\dots,2n-1$ на промежутке $[0,0+2\pi)$, причём

$$x_k = \theta + 2\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\right), k = 0,1,\dots,2n-1.$$

Теорема. Плотность распределения нулей тригонометрической рациональной функции $t_n(x)$ описывается формулой

$$p(x) = \frac{1-|\alpha|^2}{1-2|\alpha|\cos(x-\theta)+|\alpha|^2}.$$

Функция $p(x)$ принимает максимальное значение в точке $x = \theta$ и минимальное – в точке $x = \theta + \pi$, следовательно нули будут сгущаться в окрестности точки $x = \theta$. В частном случае, когда $\alpha = 0$, будем иметь полиномиальный случай, т.е.

$$x_k = \frac{\pi k}{2n}, k = 0,1, \dots, 2n, \text{ и } p(x) \equiv 1.$$