Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №3(54), Ч1, 2009

УДК 512.542

О конечных группах с заданными добавлениями к подгруппам порядка p и p^2

В. В. Подгорная

Подгруппа B конечной группы G называется добавлением к подгруппе A этой же группы, если $G = AB$. Если, кроме того, для каждой собственной подгруппы B_1 из B произведение AB_1 отлично от G, то подгруппа B называется минимальным добавлением к подгруппе A. При выполнении условия $A \cap B = 1$ добавление B называется дополнением к подгруппе A группы G. Ясно, что каждое дополнение будет минимальным добавлением.

Одно из направлений современной теории групп состоит в изучении строения групп с наборами дополняемых подгрупп. Хотя это направление восходит к работе Ф.Холла 1937 г. [1], оно не потеряло своей актуальности и в настоящее время. Обзор результатов этого направления можно найти в монографии С.Н. Черникова [8].

В настоящей работе исследуются конечные группы с заданными минимальными добавлениями к подгруппам простого порядка и подгруппам порядка p^2. Мы будем рассматривать только конечные группы.

Напомним, что через $MS(\mathfrak{F})$ обозначается совокупность всех групп, у которых минимальные добавления к каждой подгруппе принадлежат классу групп $\mathfrak{F}$ [5]. Далее нам понадобится следующее обозначение. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Через $MS^p(\mathfrak{F})$ обозначим совокупность всех групп, у которых минимальные добавления к каждой подгруппе простого порядка p принадлежат $\mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi(G)$. Справедливо включение $MS(\mathfrak{F}) \subseteq MS^p(\mathfrak{F})$. Через $\mathfrak{B}$ обозначим класс всех вполне факторизуемых групп, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ — классы всех сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно.

В настоящей работе доказаны следующие две теоремы

Теорема 1. *(1) Если $\mathfrak{F}$ — наследственный класс, то $MS^p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F} \cup (\mathfrak{B} \cap M(\mathfrak{F}))$.*

(2) Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то всякая группа $G \in MS^p(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F}$ совпадает с полупрямым произведением нормальной подгруппы простого порядка p и циклической подгруппы порядка, свободного от квадратов и делящего $p-1$.

(3) если $G \in MS^p(\mathfrak{N}) \setminus \mathfrak{N}$, то G изоморфна полупрямому произведению двух циклических подгрупп различных простых порядков.

Теорема 2. *Пусть в группе G все подгруппы порядков, равных квадратам простых чисел, обладают $\mathfrak{F}$-добавлениями, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ — наследственный класс групп, содержащий все группы простых порядков. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Для доказательства нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [3]. *Группа G является вполне факторизуемой тогда и только тогда, когда она сверхразрешима и все её силовские подгруппы элементарные абелевы.*

Лемма 2 ([2], теорема III.3.14). *Если G — p-группа, то факторгруппа по подгруппе Фраттини $G/(G)$ — элементарная абелева p-группа.*

Лемма 3 ([7], теорема IV.2.8). *Во всякой группе подгруппа индекса p, где p — наименьшее простое число, делящее порядок группы, нормальна.*

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{F}$ состоит из всех тех групп G, которые содержат нормальную подгруппу H такую, что $H \in \mathfrak{F}$ и $G/H \in \mathfrak{F}$.

Лемма 4 [6]. *Пусть $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого простого p;

2) $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G;

3) $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$;

4) если $G^{\mathfrak{F}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;

5) если $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то она элементарна;

6) если $p > 2$, то $G^{\mathfrak{F}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathfrak{F}}$ не превышает 4;

7) $\Phi(G) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$;

8) любые две $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G сопряжены в G.

Лемма 5 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, то $\Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = F(G)$.*

Лемма 6 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, имеющая нормальную силовскую p-подгруппу $G_p \neq 1$ для некоторого простого числа p. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

2) $F(G) = F_p(G) = G_p\Phi(G)$;

3) $G_{p'} \cap C_G(G_p/\Phi(G)) = \Phi(G) \cap \Phi(G_{p'}) = \Phi(G) \cap G_{p'}$, где $G_{p'}$ — любое дополнение к G_p в G.

В частности, если $\Phi(G) = 1$, то $C_G(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 7. *Если G — p-группа и все подгруппы простых порядков в ней дополняемы, то G — элементарная абелева.*

Доказательство. Если в группе G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, то согласно лемме 2 группа G элементарная абелева. Если $\Phi(G) \neq 1$, то существует подгруппа $A \leq \Phi(G)$ простого порядка p. Теперь $G = AB$, $A \cap B = 1$ и по свойствам подгруппы Фраттини $G = B$, пришли к противоречию, которое доказывает лемму.

Лемма 8. *Если в группе G дополняемы все подгруппы простых порядков и H — подгруппа группы G, то и в H дополняемы все подгруппы простых порядков.*

Доказательство. Пусть A — произвольная подгруппа из H простого порядка p, то есть $|A| = p$. Тогда найдется подгруппа B группы G такая, что $AB = G$ и $A \cap B = 1$. По тождеству Дедекинда имеем, что $H = A(H \cap B)$ и $A \cap (H \cap B) = (A \cap B) \cap H = 1$. Следовательно, подгруппа A дополняема и в подгруппе H. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если в группе G дополняемы все подгруппы простых порядков, то все силовские подгруппы элементарные абелевы.*

Доказательство этого факта следует из лемм 7 и 8.

Ниже неоднократно используется результат Ю.М. Горчакова о строении вполне факторизуемых групп, который был доказан для периодических групп в работе [3]. Приведем доказательство теоремы Ю.М. Горчакова для конечных групп.

Лемма 10. *В группе G дополняемы все подгруппы простых порядков тогда и только тогда, когда группа G сверхразрешима и все силовские подгруппы являются элементарными абелевыми.*

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы докажем индукцией по порядку группы G. По индукции все собственные подгруппы группы G сверхразрешимы, а сама группа G несверхразрешима. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Если A — подгруппа группы G и $|A| = p$, где p — наименьшее простое число из $\pi(G)$, то существует подгруппа B группы G такая, что $AB = G$ и $A \cap B = 1$. Теперь подгруппа B нормальна в группе G согласно лемме 3, а по индукции подгруппа B сверхразрешима, поэтому группа G дисперсивна по Оре. В частности, группа G разрешима.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $NM = G$. Так как $N \cap M$ — нормальная подгруппа группы M и нормальная подгруппа в N, то сама подгруппа $N \cap M$ нормальна в группе G и $N \cap M = 1$. По предположению индукции подгруппа M сверхразрешима и факторгруппа G/N также сверхразрешима. Значит, минимальная нормальная подгруппа единственна. Теперь для группы G ее подгруппа Фиттинга $F(G) = N = G_r$ — силовская r–подгруппа, где r — наибольшее простое число из $\pi(G)$. Тогда $G = NG_{r'}$, где $G_{r'}$ — дополнение к силовской r–подгруппе группы G. Пусть элемент a — неединичный элемент из N. Тогда найдется подгруппа B группы G такая, что $< a > B = G$ и $< a > \cap B = 1$. Так как $|G_{r'}|$ делит порядок подгруппы B, то $G_{r'}^x \subseteq B$ для некоторого элемента x группы G. А поскольку подгруппа $G_{r'}$ максимальна в G, то $G_{r'}^x = B$. Значит, $N =< a >$ и группа G сверхразрешима. По лемме 9 получаем, что все силовские подгруппы группы G элементарные абелевы.

Достаточность утверждения теоремы получается из того факта, что если группа является сверхразрешимой с элементарными абелевыми силовскими подгруппами, то такая группа по лемме 1 будет вполне факторизуемой. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственный класс, то $MS^p(\mathfrak{F})$ — наследственный класс.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственный класс и $G \in MS^p(\mathfrak{F})$. Пусть H — произвольная подгруппа из G. Если A — подгруппа простого порядка из H, то $G = AB$, где $B \in \mathfrak{F}$ и B является минимальным добавлением к подгруппе A в группе G. По тождеству Дедекинда $H = A(H \cap B)$. Мы можем выбрать подгруппу $B_1 \leq H \cap B$ такую, что подгруппа B_1 будет минимальным $\mathfrak{F}$-добавлением к подгруппе A в группе H. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственный класс и $B_1 \leq H \cap B \leq B \in \mathfrak{F}$, то $B_1 \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 12. *$MS^p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F} \cup \mathfrak{B}$ для любого класса $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. В группе G для любого простого делителя p её порядка по теореме Силова найдется подгруппа P простого порядка p. Возьмем для неё минимальное добавление $H \in \mathfrak{F}$. Возможны следующие ситуации.

Пусть $P \leq H$, тогда $G = PH = H \in \mathfrak{F}$.

Теперь получаем, что для любой подгруппы P простого порядка выполняется условие $P \cap H = 1$, поэтому подгруппа H будет уже дополнением к P в группе G. Значит, все подгруппы простых порядков в группе G дополняемы. Следовательно, по теореме Ю.М.Горчакова (см. лемму 10) получаем, что группа G сверхразрешима и все её силовские подгруппы элементарные абелевы. По лемме 1 такая группа G вполне факторизуема, т.е. $G \in \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ — класс групп, содержащий все группы простых порядков. Тогда $MS^p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Существует подгруппа P группы $G \in MS^p(\mathfrak{F})$, такая, что $|P| = p$ — наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда найдется минимальное добавление $H \in \mathfrak{F}$ к P в группе G. Если $P \leq H$, то $H = G \in \mathfrak{F}$. Если $P \not\leq H$, то $P \cap H = 1$. Так как p — наименьший простой делитель $|G|$, то $H \triangleleft G$. Теперь $G/H \in\subseteq \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 14 ([4], теоерема 1). (1) *В группе G нечетного порядка нет максимальных подгрупп индекса p^2, где p — наименьший простой делитель порядка группы G.*

(2) *Если у конечной группы G нет эпиморфных образов, изоморфных A_4 и S_4, то в G нет максимальных подгрупп индекса 4.*

Через $G = [A]B$ обозначается тот факт, что группа G является полупрямым произведением двух своих подгрупп A и B, где A — нормальная в G подгруппа.

Доказательство теоремы 1. (1) По лемме 12 получаем, что $MS^p(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$. Поэтому в группе $G \in MS^p(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F}$ каждая максимальная подгруппа является дополнением к подгруппе простого порядка. Отсюда следует, что каждая собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Поэтому $G \in M(\mathfrak{F})$.

(2) Из доказанного утверждения теоремы вытекает, что группа $G \in MS^p(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B} \cap M(\mathfrak{F})$. В сверхразрешимой группе все главные факторы имеют простые порядки. Ввиду лемм 4 и 5 главный фактор $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ группы G имеет простой порядок, т.е. $|G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})| = p$ — простое число. Откуда следует, что подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ циклическая. Так как группа G вполне факторизуема, то порядок $G^{\mathfrak{F}}$ есть простое число p. Поэтому по лемме 6 получаем, что $C_G(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$. Теперь группа $G = [G^{\mathfrak{F}}]H$, где подгруппа $H \leq Z_{p-1}$. А так как в H все силовские подгруппы элементарные абелевы, то порядок подгруппы H свободен от квадратов.

(3) Ввиду (1) $MS^p(\mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{U}$. Пусть $G \in MS^p(\mathfrak{N}) \setminus \mathfrak{N}$. Поэтому G сверхразрешима. Если $\Phi(G) \neq 1$, то существует нильпотентное минимальное добавление D к каждой её подгруппе P простого порядка и $G = PD$, т.е. $G \in \mathfrak{N}$. Поэтому далее полагаем $(G) = 1$. Так как группа G сверхразрешима, то в G имеется нормальная подгруппа Z_p простого порядка p, где p — наибольшее простое число, делящее порядок группы G. По условию существует нильпотентное минимальное добавление H к Z_p. Ясно, что $H \cap Z_p = 1$. Если $Z_p \subseteq Z(G)$, то $G = Z_p \times H$, поэтому G нильпотентна. Пусть Z_p не содержится в $Z(G)$. По (2) получаем, что $G = [Z_p]Z$, где циклическая подгруппа Z имеет порядок свободный от квадратов и делящий $p - 1$.

Предположим, что G — не бипримарная группа. Тогда существует простое число t, делящее порядок G и отличное от p и от r. Получаем, что Z_p и Z попадут в нильпотентное минимальное добавление к подгруппе простого порядка t. Такая подгруппа в группе G существует по условию. Следовательно, Z централизует Z_p. Противоречие. Поэтому, $G = [Z_p]Z$ — бипримарная группа, $|Z|$ — примарная подгруппа. Ввиду (2) порядок группы Z свободен от квадратов и, значит, равен простому числу. Тем самым (3) доказано.

Доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 проведём индукцией по порядку группы G. Рассмотрим группу G наименьшего порядка, у которой все подгруппы порядка p^2 для каждого $p \in \pi(G)$ имеют $\mathfrak{F}$-добавления, а сама группа $G \notin \mathfrak{F}$. Выберем p — наименьший простой делитель порядка группы G. Если силовская p-подгруппа G_p группы G имеет простой порядок, то p'-холлова подгруппа $G_{p'}$ будет нормальна в группе G. В силу наследственности класса $\mathfrak{F}$ получаем, что в каждой подгруппе группы G все подгруппы порядка, равного квадрату простого числа, будут $\mathfrak{F}$-добавляемы. Поэтому по индукции подгруппа $G_{p'} \in \mathfrak{F}$ и факторгруппа $G/G_{p'} \simeq G_p \in \mathfrak{F}$. Тогда из условия $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ получаем, что группа $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G.

Пусть теперь силовская p-подгруппа G_p имеет порядок $\geq p^2$. И пусть A — подгруппа группы G такая, что $|A| = p^2$. По условию теоремы существует подгруппа B такая, что $AB = G$ и $B \in \mathfrak{F}$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $|G : B| = 1$;
2) $|G : B| = p$;
3) $|G : B| = p^2$.

В первом случае сразу получаем $G = B \in \mathfrak{F}$. Во втором случае подгруппа B будет нормальной максимальной подгруппой, принадлежащей $\mathfrak{F}$, $|A \cap B| = p$ и $G/B \simeq P$, где P — группа простого порядка p. По условию теоремы $P \in \mathfrak{F}$ и теперь $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию с выбором группы G.

В третьем случае рассмотрим сначала группу G, у которой нет эпиморфных образов, изоморфных A_4 и S_4. Тогда из леммы 14 следует, что для наименьшего простого делителя p порядка группы G нет максимальной подгруппы индекса p^2. Таким образом, подгруппа B не является максимальной подгруппой группы G. Значит, найдётся подгруппа C такая, что $B < \cdot\, C < \cdot\, G$, при этом $|G : C| = |C : B| = p$, $B \triangleleft C \triangleleft G$ и подгруппа B субнормальна в группе G. Так как нормальная подгруппа B группы C принадлежащит $\mathfrak{F}$ и факторгруппа $C/B \simeq P$ — подгруппа простого порядка p, принадлежащая $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\in \mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Рассуждая аналогичным образом для нормальной подгруппы C группы G, придём к тому, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Рассмотрим теперь случай 3) для группы чётного порядка G, в которой найдётся такая нормальная подгруппа N, что $G/N \simeq A_4$ или S_4. По индукции и в силу наследственности класса $\mathfrak{F}$ подгруппа N будет принадлежать $\mathfrak{F}$. Группа $A_4 = [E_4]Z_3 \in \mathfrak{F}$, поскольку подгруппа $E_4 =< a > \times < b >\in \mathfrak{F}$ и $Z_3 \in \mathfrak{F}$. Группа $S_4 = [A_4]Z_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Если в конечной группе G все подгруппы порядков, равных квадратам простых чисел, обладают разрешимыми добавлениями, то группа G разрешима.*

Abstract. In the paper the structure of finite groups with given supplements to subgroups of order p and p^2 is investigated.

Литература

1. Hall Ph. Complemented group / Ph.Hall. — J.London Math.Soc. — 1937.— Vol.12.— P.201-204.

2. Huppert B. Endliche Gpuppen I. Berlin / B.Huppert. — Heidelberg — New York, 1967. — 793s.

3. Горчаков Ю.М. Примарно факторизуемые группы / Ю.М.Горчаков. — Учен. зап. Пермск. ун–та, 1960. — № 17.— С. 15-31.

4. Монахов В.С. Отсутствие максимальных подгрупп в конечных группах / В.С.Монахов. — Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. — Вопросы алгебры. — № 19. — Гомель, 2007. — С. 50-53

5. Самусенко (Подгорная) В.В. О конечных группах с заданными минимальными добавлениями к подгруппам / В.В.Самусенко (Подгорная). — Вопросы алгебры. Выпуск 13. — Гомель: Изд-во ГГУ им.Ф.Скорины, 1998. — С. 177-182.

6. Семенчук В.Н. О минимальных не $\mathfrak{F}$–группах / В.Н.Семенчук. — ДАН БССР, 1978. — № 7. — С. 596–599.

7. Холл М. Теория групп / М.Холл. — М.: ИЛ. 1962. — 468с.

8. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп / С.Н.Черников. — М.: Наука, 1980. — 384с.

9. Шеметков Л.А. Формации конечных групп / Л.А.Шеметков. — М.: Наука, 1978, — 272с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 10.01.09