М. А. Сербул
(*ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно*)

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ НА ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

В работе рассматривается применение методов изучения эллиптических кривых для решения диофантовых уравнений на примере кривой $E\colon y^2 = x(x^2 - 3x + 3)$. Обозначим множество всех рациональных точек этой кривой через $E(\mathbb{Q})$. Введём также вспомогательную кривую $\bar{E}\colon y^2 = x(x^2 + 6x - 3)$, и множество её рациональных точек $\bar{E}(\mathbb{Q})$. Исследование проводится в два этапа. Для начала, исследуется группа $E(\mathbb{Q})$ с помощью гомоморфизмов $f\colon E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$, $\bar{f}\colon \bar{E}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ и отображений $\psi\colon E(\mathbb{Q}) \to \bar{E}(\mathbb{Q})$ и $\bar{\psi}\colon \bar{E}(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q})$. Оказывается, что $\mathrm{im} f = \{\mathbb{Q}^{*2}, 3\mathbb{Q}^{*2}\}$, $\mathrm{im} f = \{\mathbb{Q}^{*2}, -3\mathbb{Q}^{*2}\}$, и

$$P \in E(\mathbb{Q}), f(P) = \mathbb{Q}^{*2} \Leftrightarrow P \in \bar{\psi}(\bar{E}(\mathbb{Q})),$$
$$\bar{P} \in \bar{E}(\mathbb{Q}), \bar{f}(\bar{P}) = \mathbb{Q}^{*2} \Leftrightarrow \bar{P} \in \psi(E(\mathbb{Q})).$$

Исходя из этих свойств, доказывается, что $E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q}) = \{0, (0;0)\}$, то есть $|E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q})| = 2$. С другой стороны, по теореме Морделла, $E(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}^r \times E_{tors}(\mathbb{Q})$, откуда

$$|E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q})| = \left|(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \times (E_{tors}(\mathbb{Q})/2E_{tors}(\mathbb{Q}))\right| = 2^{r+1},$$

то есть ранг равен 0. Воспользовавшись теоремой Лутц-Нагелля, найдём все рациональные точки этой кривой: $(0;0), (1;\pm 1), (3;\pm 3)$.

Аналогичные методы можно применять для поиска рациональных точек и на других эллиптических кривых [1].

Литература

1. Кнепп, Э. Эллиптические кривые / Э. Кнепп. – М.: Факториал Пресс, 2004. – 488 с.