Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №3(54), Ч1, 2009

УДК 512.567.5

Критерии полуабелевости и векторы n-арных групп

Ю. И. Кулаженко

Введение. Рассматривается n-арная группа $G = \langle x, (\ ), {}^{[-2]}\rangle$. Упорядоченную пару $\langle a, b\rangle$ точек $a, b \in X$ называют направленным отрезком n-арной группы G и обозначают через $\overline{ab}$.

Говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырёхугольник $\langle a, c, d, b\rangle$ — параллелограмм, т.е. $(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d) = b$.

Пусть $\overline{V}$ — множество всех направленных отрезков n-арной группы G. Согласно предложению 1 из [1] бинарное отношение $=$ на множестве $\overline{V}$ является отношением эквивалентности и разбивает множество $\overline{V}$ на непересекающиеся классы. Класс порожденный направленным отрезком $\overline{ab}$, имеет вид

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V},\ \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором $\overrightarrow{ab}$ n-арной группы G, понимают класс $K(\overline{ab})$, т.е. $\overrightarrow{ab} = K(\overline{ab})$.

Целью данной работы является установление новых критериев полуабелевости n-арной группы G, выраженных через свойства векторов G.

Изложим теперь полученные результаты.

Предложение 1. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$ выполняется равенство*

$$(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)) = ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d). \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть для любых точек $a, b, c, d \in X$ равенство (1) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in X^n$. Учитывая равенство (1) и то, что $x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}$ и $x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_n$ — нейтральные $2(n-1)$ последовательности, имеем

$$\begin{aligned}(x_1^n) &= (x_1x_2^{n-1}x_n) = (x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)) = \\ &= (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)) = (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)) = \\ &= ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n))x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1) = ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_2^n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1) = \\ &= (x_nx_2^nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1) = (x_nx_2^{n-1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1)) = (x_nx_2^{n-1}x_1).\end{aligned} \qquad (2)$$

На основании равенства (2), с учётом определения полуабелевой n-арной группы заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Если G — полуабелева n-арная группа, то справедливость равенства (1) следует из предложения 4 из [2].

Предложение доказано.

Теорема 1. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$ справедливо равенство*

$$2\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{S_a(c)S_b(d)}. \qquad (3)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

Доказательство. 1. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (3).

Рассмотрим левую часть равенства (3) с учетом определений 4 и 8 из [1], теоремы 8 из [3]. Имеем

$$2\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} = \overrightarrow{aS_b(a)}. \tag{4}$$

Аналогично поступим с правой частью равенства (1), учитывая то, что G — полуабелева nарная группа и равенство 3.28 из [4]. Имеем

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{cd} + \overrightarrow{S_a(c)S_b(d)} = \overrightarrow{c(d(S_a(c))^{[-2]}\underbrace{S_a(c)\ldots S_a(c)}_{2n-4}S_b(d))} = \\
&= \overrightarrow{c(d(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}(bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b))} = \\
&= \overrightarrow{c(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b))} = \\
&= \overrightarrow{c((da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b))d^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)} = \\
&= \overrightarrow{c((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}dd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)} = \\
&= \overrightarrow{c(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b))} = \overrightarrow{c(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}S_b(a))} = \\
&= \overrightarrow{cc} + \overrightarrow{aS_b(a)} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{aS_b(a)} = \overrightarrow{aS_b(a)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) следует справедливость равенства (3).

2. Пусть равенство (3) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

С учётом определения 8 из [1], теоремы 8 из [3], равенства 3.28 из [4], определения 4 из [1] перепишем равенство (3) в виде

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{c(d(S_a(c))^{[-2]}\underbrace{S_a(c)\ldots}_{2n-4}S_b(d))}$$

или

$$\overrightarrow{a(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} = \overrightarrow{c(d(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}(bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b))}.$$

Откуда

$$\overrightarrow{a(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} = \overrightarrow{c(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)}. \tag{6}$$

Из равенства (6), на основании определения 2 из [1], следует, что четырёхугольник

$$\langle a, c, (da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b), (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\rangle$$

— параллелограмм G. Тогда, на основании определения параллелограмма, справедливо равенство

$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}b)) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \tag{7}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Умножим обе части равенства (7) справа на выражение $b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d$. Получим

$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d).$$

Откуда, с учетом нейтральности последовательностей $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ и $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ для любого $x \in X$, имеем

$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)$$

или

$$(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d). \tag{8}$$

На основании равенства (8)и предложения 1 заключаем, что G — полуабелева n-арная группа. Теорема доказана.

Теорема 2. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$ справедливо равенство*

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{S_b(a)S_d(c)} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{S_c(a)S_d(b)}. \tag{9}$$

Доказательство. 1. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (9).

Рассмотрим левую часть равенства (9) с учётом теоремы 8 из [3], определения 4 из [1], равенства 3.28 из [4] и полуабелевости n-арной группы G. Имеем

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{S_b(a)S_d(c)} = \overrightarrow{a(b(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots S_d(c)}_{2n-4})} =$$

$$= \overrightarrow{a(b(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d))} =$$

$$= \overrightarrow{a(bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)} = \overrightarrow{a((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)} =$$

$$= \overrightarrow{a(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d))} = \overrightarrow{a((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)} =$$

$$= \overrightarrow{a((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)} = \overrightarrow{a(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)}. \tag{10}$$

Аналогично рассмотрим правую часть равенства (9). Имеем

$$\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{S_c(a)S_d(b)} = \overrightarrow{a(c(S_c(a))^{[-2]}\underbrace{S_c(a)\ldots S_d(b)}_{2n-4})} =$$

$$= \overrightarrow{a(c(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots}_{2n-4}(db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d))} =$$

$$= \overrightarrow{a(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)} = \overrightarrow{a(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)}. \tag{11}$$

На основании (10) и (11) заключаем, что равенство (9) справедливо.

2. Пусть равенство (9) выполняется. Докажем, что G-полуабелева n-арная группа.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

На основании теоремы 8 из [3] равенство (9) перепишем в виде

$$\overrightarrow{a(b(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots S_d(c)}_{2n-4})} = \overrightarrow{a(c(S_c(a))^{[-2]}\underbrace{S_c(a)\ldots S_d(b)}_{2n-4})}.$$

Откуда, с учётом определения 2 из [1] заключаем, что четырёхугольник

$$\langle a, a, (c(S_c(a))^{[-2]}\underbrace{S_c(a)\ldots S_d(b)}_{2n-4}), (b(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots S_d(c)}_{2n-4})\rangle$$

— параллелограмм G, т.е. справедливо равенство

$$(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(c(S_c(a))^{[-2]}\underbrace{S_c(a)\ldots S_d(b)}_{2n-4})) = (b(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots S_d(c)}_{2n-4})$$

или

$$(c(S_c(a))^{[-2]}\underbrace{S_c(a)\ldots S_d(b)}_{2n-4}) = (b(S_b(a))^{[-2]}\underbrace{S_b(a)\ldots S_d(c)}_{2n-4}). \tag{12}$$

Преобразуем обе части равенства (12) с учётом определения 4 из [1] и равенства 3.28 из [4]. Имеем

$$(c(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots(db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d)}_{2n-4}) =$$

$$= (b(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)}_{2n-4})$$

или

$$(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) = (bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d),$$

или

$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d). \tag{13}$$

Умножим обе части равенства (13) слева на выражение $ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}$, а справа на — $d^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c$. Имеем

$$(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c) = (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}dd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c). \tag{14}$$

С учетом нейтральности $2(n-1)$-последовательности $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ для любого $x \in X$, равенство (14) принимает вид

$$(db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d). \tag{15}$$

С учётом произвольности точек $c, b, d \in X$, на основании равенства (15) и предложения 4 из [2] заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Теорема доказана.

Предложение 2. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$ справедливо равенство*

$$(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d) = ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \tag{16}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Доказательство. 1. Пусть для любых точек $a, b, c, d \in X$ равенство (16) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in X^n$. Учитывая то, что $x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}$ и $x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_n$ — нейтральные последовательности и само равенство (16), имеем

$$(x_1^n) = (x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)) = (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)) =$$
$$= (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)) = ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n))x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1) =$$
$$= ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1)x_2^{n-1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1)) = (x_nx_2^{n-1}x_1).$$

На основании определения заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (16). Рассмотрим правую часть равенства (16). Имеем

$$((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = ((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$
$$= (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d).$$

Предложение доказано.

Теорема 3. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d \in X$ справедливо равенство*

$$\overrightarrow{S_d(S_c(a))S_d(S_c(b))} = \overrightarrow{ab}. \qquad (17)$$

Доказательство. 1. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (17).

Согласно определению 2 из (1) равенство (17) будет выполнятся, если четырёхугольник

$$\langle S_d(S_c(a)), a, b, S_d(S_c(b))\rangle$$

— параллелограмм G, т.е. если справедливо равенство

$$(S_d(S_c(a))a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = S_d(S_c(b)). \qquad (18)$$

Рассмотрим левую часть равенства (18) с учётом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [3] и полуабелевости группы G. Имеем

$$(S_d(S_c(a))a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (S_d(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$
$$= ((d(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots}_{2n-4}d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$
$$= ((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$
$$= (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)) = (d(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}d) =$$
$$= (d(S_c(b))^{[-2]}\underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4}d) = S_d(S_c(b)).$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Справедливость равенства (18) установлена, а значит, четырёхугольник $\langle S_d(S_c(a)), a, b, S_d(S_c(b))\rangle$ — параллелограмм G, и справедливо равенство (17).

2. Пусть равенство (17) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Из (17) следует справедливость равенства (18). Это равенство перепишем, с учётом определения 4 из [?], в виде

$$(S_d(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = S_d(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)$$

или

$$((d(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots}_{2n-4}d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (d(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}d),$$

или, с учётом равенства 3.28 из [?] и предложения 1 из [?],

$$(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d).$$

Откуда

$$((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d). \qquad (19)$$

На основании предложения 2 заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Теорема доказана.

Abstract. Criteria of semi-abelity of n-ary groups are considered.

Литература

1. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1998. — 182 с.

2. Кулаженко, Ю.И. Построение фигур аффинной геометрии на n-арной группе / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 65–82.

3. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 47–64.

4. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1992. — 264 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.04.09

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ