

## Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля

Р. И. КОРЖИК, С. П. ЖОГАЛЬ

В химии, биологии, электронике и в других областях естествознания широко распространены системы с предельным циклом, которые подвержены внешнему воздействию [1-3]. В данной работе рассматривается одна из таких систем – осциллятор Ван-дер-Поля с внешним периодическим воздействием. В [1] была рассмотрена подобная модель:

$$\ddot{x}[t] - (\lambda - x^2[t])\dot{x}[t] + x[t] = b \sin(\omega t). \quad (1)$$

Рассмотрим более общий случай этой системы, введя в него запаздывание  $\delta$ . Математическая модель данной системы будет иметь вид:

$$\ddot{x}[t] - (\lambda - \beta x^2[t - \delta])\dot{x}[t - \delta] + x[t] = b \sin(\omega t). \quad (2)$$

Параметр  $b$  определяет безразмерную амплитуду, а  $\omega$  задает частоту внешнего воздействия, отнесенную к частоте собственных малых колебаний осциллятора.

Решение уравнения (2) будем искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой  $A(t)$ :

$$x(t) = \operatorname{Re}(A(t)e^{i\omega t}) = \frac{1}{2} A(t)e^{i\omega t} + \frac{1}{2} A^*(t)e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где  $A^*(t)$  – комплексно сопряженное к  $A(t)$ .

На искомое решение наложим дополнительное условие:

$$\dot{A}e^{i\omega t} + \dot{A}^*e^{-i\omega t} = 0. \quad (4)$$

После подстановки (3) в уравнение (2) с учетом (4), введя замену

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, z = \frac{A}{2\sqrt{\lambda/\beta}}, \Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda\omega}, \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda\sqrt{\lambda/\beta}}, \theta = \delta\omega, \quad (5)$$

получим уравнение с тремя параметрами:

$$\dot{z} + i\Delta e^{-i\theta} - z e^{-i\theta} + |z|^2 z e^{-i\theta} + \varepsilon = 0, \quad (6)$$

Функцию  $z(\tau)$  можно записать в виде  $Re^{i\varphi}$ , где  $R$  и  $\varphi$  -- некоторые функции переменной  $\tau$ . Тогда из уравнения (6), разделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= (R - R^3) \cos \theta - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -(1 - R^2) \sin \theta + (\varepsilon/R) \sin \varphi - \Delta. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть  $(R_0, \varphi_0)$  – особая точка системы (7). Тогда уравнения (7) в стационарном виде примут вид ( $\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$ ):

$$\begin{aligned} R_0(1 - R_0^2) \cos \theta &= \varepsilon \cos \varphi_0, \\ R_0(1 - R_0^2) \sin \theta + \Delta R_0 &= \varepsilon \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Возводя обе части в квадрат, складывая и делая замену  $\xi_0 = R_0^2$ , получим:

$$\xi_0^3 - 2(\Delta \sin \theta + 1)\xi_0^2 + (\Delta^2 + 2\Delta \sin \theta + 1)\xi_0 = \varepsilon^2. \quad (9)$$

Неотрицательные решения уравнения (9) относительно  $\xi_0$  будут давать стационарные состояния.

Для исследования поведения системы вблизи стационарных точек была выписана система для отклонения от стационарного состояния и составлено соответствующее характери-

стическое уравнение. После применения критерия Рауса-Гурвица было получено следующее условие устойчивости:

$$\begin{aligned} 0 < J, \\ 0 > S, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} S &= (2 - 4\xi_0)\cos\theta, \\ J &= 3\xi_0^2 - 4(1 + \delta\sin\theta)\xi_0 + \delta^2 + 2\delta\sin\theta + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Для построения линий бифуркации приравняем  $S$  и  $J$  к нулю и решим полученные уравнения относительно  $\xi_0$ . Решение уравнения  $J = 0$  будет следующим:

$$\xi_{1,2} = \frac{2 + 2\Delta\sin\theta \pm \sqrt{(4\sin^2\theta - 3)\Delta^2 + 2\Delta\sin\theta + 1}}{3} \quad (12)$$

Подставив (12) в уравнение (9), мы получим линии в плоскости параметров (при фиксированном параметре  $\theta$ ), при пересечении которых  $J$  будет менять знак на противоположный (см. рисунок 1).

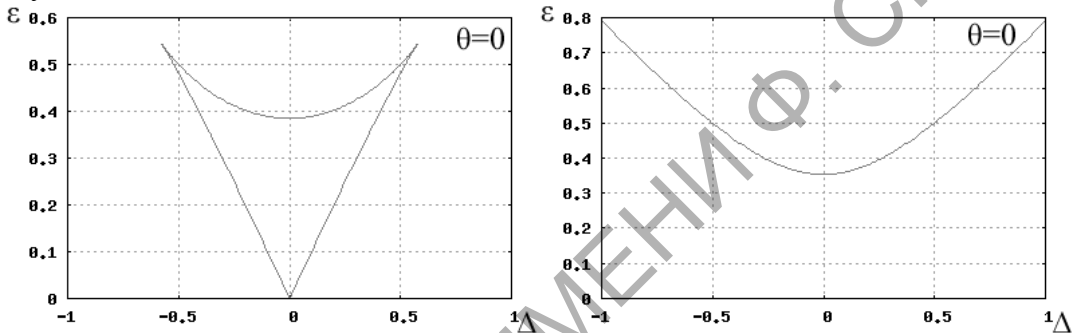


Рисунок 1 – Линии бифуркации при  $\theta = 0$ .

На основе уравнения (9) введем следующую функцию:

$$f(\xi_0) = \xi_0^3 - 2(\Delta\sin\theta + 1)\xi_0^2 + (\Delta^2 + 2\Delta\sin\theta + 1)\xi_0 - \varepsilon^2. \quad (13)$$

График этой функции будет представлять собой кубическую параболу. Пересечение этого графика с осью абсцисс дает стационарные точки. Можно показать, что производная функции (13) совпадает со вторым соотношением (11). Следовательно, при пересечении линий, показанных слева на рисунке 1, будет меняться и количество действительных решений уравнения (9). Внутри фигуры, изображенной на рисунке 1, стационарных состояний будет три, а вне фигуры - одно. Также в силу первого из условий (11), устойчивым может оказаться только то состояние равновесия, которое соответствует интервалам возрастания функции (13).

Вычислим ещё одну линию бифуркации из первого соотношения системы (11) при  $S = 0$ . Решением этого уравнения является  $\xi_0 = 1/2$ . Подставив это решение в уравнение (9), получим линию, при пересечении которой  $S$  будет менять знак. Полученная линия изображена на рисунке 1 справа. Когда параметр  $\varepsilon \cong 0.4$ , эта линия не изменяет устойчивость стационарных состояний, так как знак  $S$  изменяется у состояния равновесия, которое соответствует интервалу убывания функции (13). Однако когда  $\varepsilon \cong 0.5$ , наблюдается немного иная картина. Определим условие, при котором пересечению полученной линии не соответствует смена устойчивости. Для этого приравняем  $J$  к нулю и подставим  $\xi_0 = 1/2$ . В результате получаем  $\Delta = \pm 1/2$ . Таким образом, искомое условие будет выглядеть так:

$$-\frac{1}{2} < \Delta < \frac{1}{2}. \quad (14)$$

При значении  $\Delta = \pm 1/2$  линия будет касаться одной из линий, показанных слева на рисунке 1. В результате в полуплоскости параметров, соответствующей положительному значению параметра  $\Delta$ , образуется область, в которой будет три состояния равновесия, два из которых будут устойчивыми (см. рисунок 2).

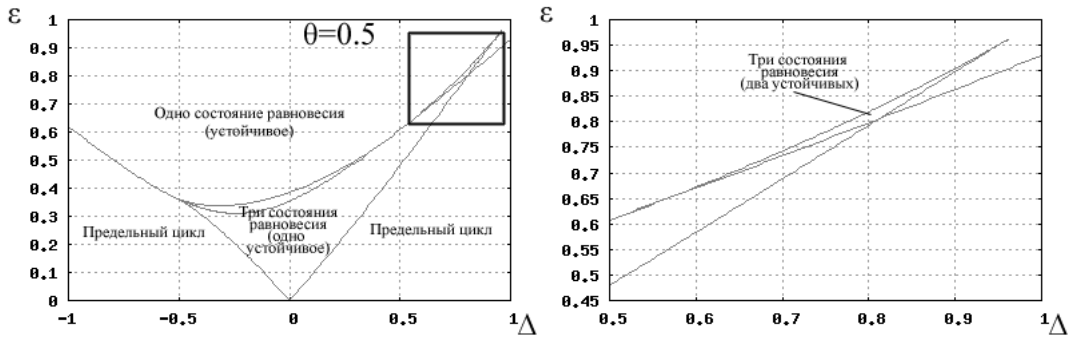


Рисунок 2 – Линии бифуркации при  $\theta = 0.5$ .

В полуплоскости параметров, соответствующей отрицательному значению  $\Delta$ , также образуется область с тремя состояниями равновесия, но устойчивых состояний среди них не будет (см. рисунок 3). Кроме того, на построенном фазовом портрете для соответствующей области наблюдается предельный цикл.

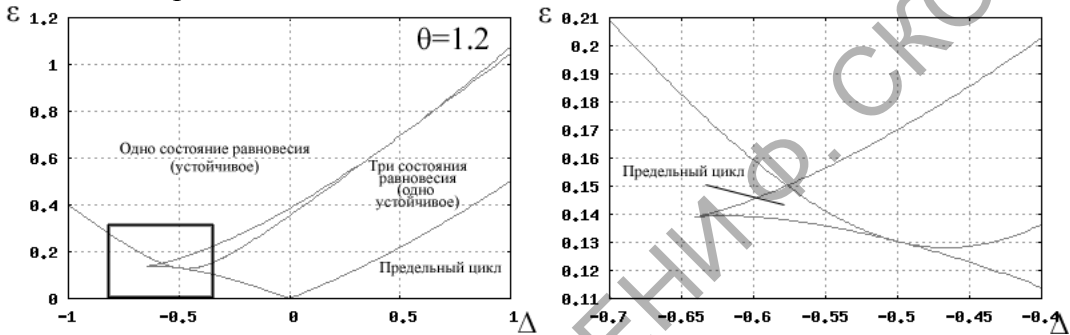


Рисунок 3 – Линии бифуркации при  $\theta = 1.2$ .

Изменение линий бифуркации при изменении параметра  $\theta$  показано на рисунке 4.

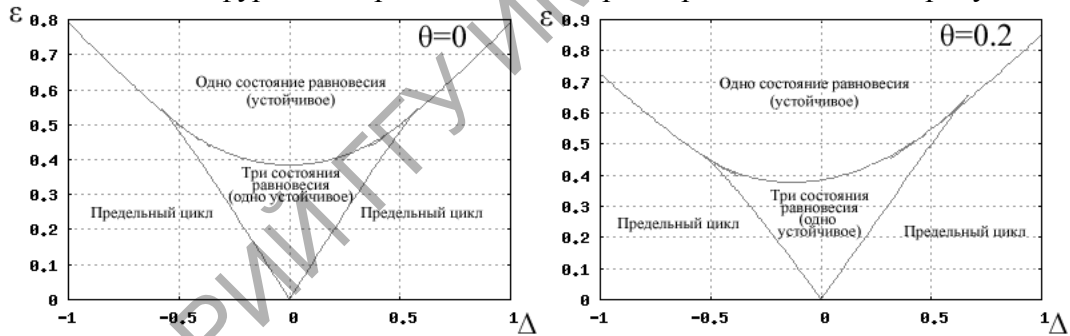


Рисунок 4 – Линии бифуркации при  $\theta = 0, \theta = 0.2$ .

Используя численные методы, исследуем область, отмеченную на рисунке 2, более детально. Фрагмент фазового портрета для параметров  $\Delta = 0.8, \epsilon = 0.8, \theta = 0.5$  приведен на рисунке 5. На фазовом портрете видны две устойчивые стационарные точки.

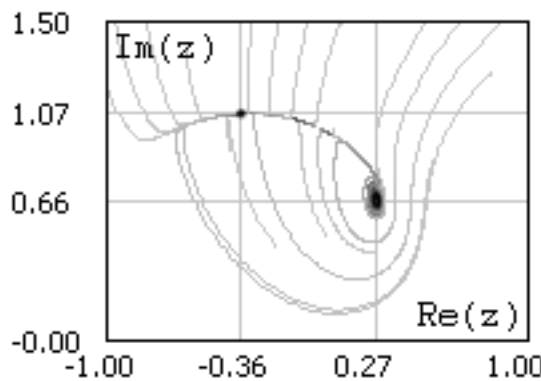


Рисунок 5 – Фазовый портрет уравнения (6) при  $\Delta = 0.8, \epsilon = 0.8, \theta = 0.5$ .

Определим бассейны притяжения этих точек. Для этого воспользуемся характеристическими показателями Ляпунова. Показатели Ляпунова характеризуют поведение изначально-

но близких точек в фазовом пространстве. Из рисунка 5 видно, что фазовые кривые качественно ведут себя по-разному, в зависимости от того, к какой стационарной точке они притягиваются.

Для каждого исследуемого начального состояния системы проведем численное решение уравнений на таком интервале времени, чтобы быть уверенными в том, что получившаяся точка находится в непосредственной близости к одной из стационарных точек. Затем произведем вычисление показателей Ляпунова при помощи обобщенного алгоритма Бенеттина с использованием ортогонализации Грама-Шмидта [4]. На рисунке 6 показаны два бассейна притяжения к стационарным точкам: к устойчивому узлу  $z \approx (-0.36; 1.07)$  – более светлым тоном, к устойчивому фокусу  $z \approx (0.27; 0.66)$  – более темным тоном.

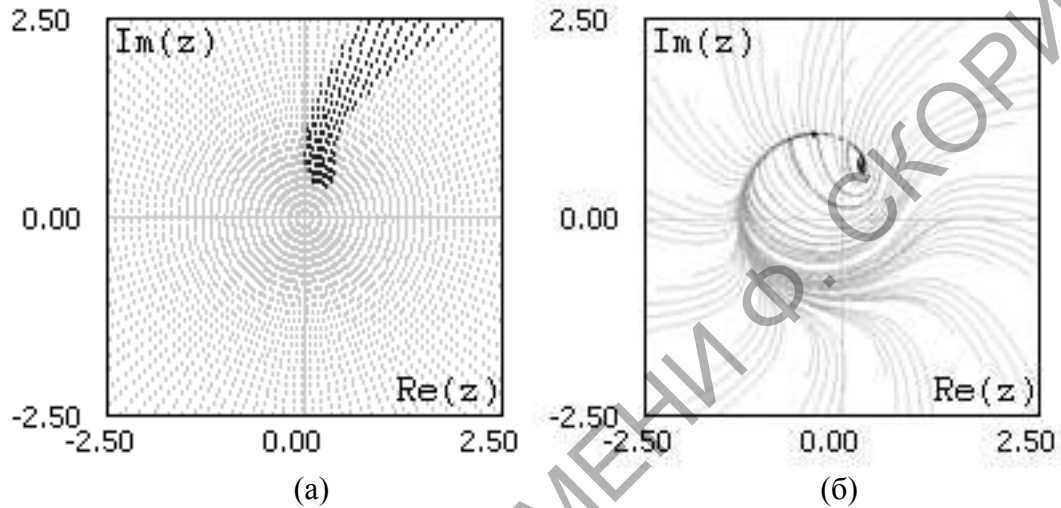


Рисунок 6 – Бассейны притяжения двух устойчивых стационарных точек (а) и фазовый портрет (б) уравнения (6) при  $\Delta = 0.8, \varepsilon = 0.8, \theta = 0.5$ .

Также следует отметить, что все расчеты производились при условии, что  $0 \leq \theta < \pi/2$ . При  $\theta = \pi/2$  появится стационарное состояние типа центр. Это связано с тем, что  $S$  будет принимать значение 0 при любых значениях параметров  $\varepsilon, \Delta$ . Фазовый портрет для параметров  $\Delta = 0.8, \varepsilon = 0.8, \theta = \pi/2$  приведен на рисунке 7. На приведенном фазовом портрете видны два стационарных состояния типа центр.

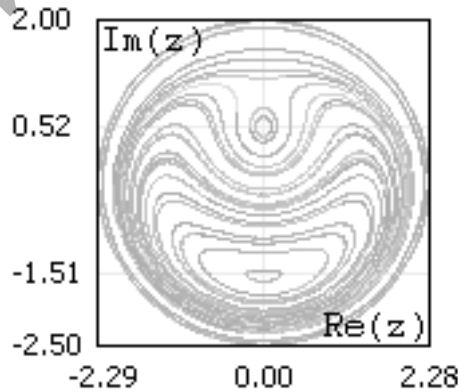


Рисунок 7 – Фазовый портрет уравнения (6) при  $\Delta = 0.8, \varepsilon = 0.8, \theta = \pi/2$ .

Таким образом, видно, что учет запаздывания в системе (1) при различных значениях параметра  $\theta$  приводит к качественной смене динамики ее поведения.

**Резюме.** Исследовано влияние запаздывания на динамические режимы неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля с внешним гармоническим воздействием. Выведено укороченное уравнение и построены карты динамических режимов для различных значений параметра, характеризующего запаздывание. С использованием показателей Ляпунова построены бассейны притяжений двух устойчивых стационарных состояний.

**Abstract.** The effect of delay on the dynamical regimes of non-autonomous Van der Pol's oscillator with an external harmonic influence was investigated. Truncated equation was derived and the maps of dynamical regimes for different values of the parameter characterizing the delay were presented. Basins of attraction of two stable stationary states are constructed using Lyapunov's exponents.

### Литература

1. Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – Москва: Физматлит, 2002. – 292 с.
2. Ланда, П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П. С. Ланда. – Москва: Наука, 1980. – 360 с.
3. Пиковский, А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс. – Москва: Техносфера, 2003. – 496 с.
4. Кузнецов, С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. / С.П. Кузнецов. – 2 изд. – Москва: Физматлит, 2006. – 356 с.

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины

Поступило 15.01.10

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ