Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №1(58), 2010

УДК 512.567.5

Самосовмещения элементов n-арных групп

Ю. И. Кулаженко

Многообразные примеры групп можно получить, рассматривая самосовмещения геометрических фигур (см. [1]). Естественно возникает задача о построении таких геометрических объектов, которые позволили бы рассматривать самосовмещения произвольной точки и множеств точек относительно фиксированных элементов этих объектов.

На основании результатов С.А.Русакова из [2, 3], в [4] было введено понятие самосовмещения точек (элементов) n-арной группы $G = \langle X, (\ ),^{[-2]} \rangle$.

Будем говорить, что точка $p \in X$ самосовмещается, если существует последовательность симметрий этой точки относительно других точек из X, в результате которых точка p отображается в себя.

Напомним, что точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a. Последовательность k элементов из X называют k-угольником G. n-Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ выполняется равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

В данной работе приведены две теоремы, в которых установлено самосовмещение произвольной точки $p \in X$ относительно элементов последовательностей вершин шестиугольников G. Шестиугольники построены при помощи гомотетии с коэффициентом равным 2 и с центрами: в первом случае — одна из вершин шестиугольника

$$\langle S_b(a), S_c(a), S_c(b), S_a(b), S_a(c), S_b(c) \rangle, \tag{1}$$

а во втором — произвольная точка $v \in X$. Центры гомотетий, вершины шестиугольника (1) и соответствующие вершины полученных шестиугольников коллинеарны.

Обозначения, определения и результаты, используемые в работе, можно найти в [2–5].

Теорема 1. *Если G — полуабелева n-арная группа, a, b, c — произвольные точки из X, то произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника*

$$\langle S_a(c), S_{S_b(c)}(S_a(c)), S_{S_b(a)}(S_a(c)), S_{S_c(a)}(S_a(c)), S_{S_c(b)}(S_a(c)), S_{S_a(b)}(S_a(c)) \rangle,$$

т.е. справедливо равенство

$$S_{S_{S_a(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p))))) = p. \tag{2}$$

Доказательство. Установим справедливость равенства (2). На основании определения 4 из [3], имеем

$$S_{S_a(c)}(p) = (S_a(c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_a(c)) = (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a).$$

Тогда с учетом равенства 3.28 из [2], предложения 1 из [5] и того, что для любого $x \in X$ последовательности $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ и $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ являются нейтральными $2(n-1)$-последовательностями,

$$S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p)) = (S_{S_b(c)}(S_a(c))(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}$$

$$\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4} S_{S_b(c)}(S_a(c))) =$$

$$= ((S_b(c)(S_a(c))^{[-2]}\underbrace{S_a(c)\ldots}_{2n-4} S_b(c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(S_b(c)(S_a(c))^{[-2]}$$

$$\underbrace{S_a(c)\ldots}_{2n-4} S_b(c))) =$$

$$= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)$$

$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b$$

$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$

$$= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b$$

$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \qquad (3)$$

С учетом равенства (3), равенства 3.28 из [2], предложения 1 из [5], нейтральности последовательностей $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ и $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ для любого $x \in X$ имеем

$$S_{S_{S_b(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p))) =$$

$$= (S_{S_b(a)}(S_a(c))(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b$$

$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}$$

$$\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}$$

$$S_{S_b(a)}(S_a(c))) = ((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)$$

$$b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}$$

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a$$

$$p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) = (cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,c). \qquad (4)$$

С учетом равенства (4) и предыдущих рассуждений имеем, что

$$S_{S_{S_c(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p)))) =$$

$$= (S_{S_c(a)}(S_a(c))(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,c)^{[-2]}\underbrace{(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,c)\ldots}_{2n-4}S_{S_c(a)}(S_a(c))) =$$

$$= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)\ldots}_{2n-4}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)$$

$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)\ldots}_{2n-4}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)) =$$

$$= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c$$

$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c) = (\underbrace{ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ldots}_{4}p\,\underbrace{a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c\ldots}_{4}). \qquad (5)$$

Тогда с учетом равенства (5), равенства 3.28 из [2], предложения 1 из [5], имеем

$$S_{S_{S_c(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p))))) =$$

$$= (S_{S_c(b)}(S_a(c))(\underbrace{ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ldots}_{4}p\,\underbrace{a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c\ldots}_{4})^{[-2]}$$

$$\underbrace{(\underbrace{ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ldots}_{4}p\,\underbrace{a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c\ldots}_{4}\ldots}_{2n-4}\ldots S_{S_c(b)}(S_a(c))) =$$

$$= ((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)\ldots}_{2n-4}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)$$

$$\underbrace{c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a\ldots}_{4}p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,\underbrace{ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ldots}_{4}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)^{[-2]}$$

$$\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)\ldots}_{2n-4}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)) =$$

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c) =$$

$$= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c) =$$

$$= (cb^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,cc^{[-2]^{2n-4}}c\,ap^{[-2]^{2n-4}}p\,ac^{[-2]^{2n-4}}c\,cb^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,c) =$$

$$= (cb^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ap^{[-2]^{2n-4}}p\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,c). \qquad (6)$$

Рассмотрим левую часть равенства (2) с учетом равенства (6) и предыдущих рассуждений. Имеем

$$S_{S_{S_a(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(b)}(S_a(c))}(S_{S_{S_c(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(a)}(S_a(c))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(c))}(S_{S_a(c)}(p)))))) =$$

$$= (S_{S_a(b)}(S_a(c))(cb^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ap^{[-2]^{2n-4}}p\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,c)^{[-2]}$$

$$\underbrace{(cb^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ap^{[-2]^{2n-4}}p\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,c)\ldots}_{2n-4} S_{S_a(b)}(S_a(c))) =$$

$$= ((ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a)(ac^{[-2]^{2n-4}}c\,a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]^{2n-4}}c\,a)\ldots}_{2n-4}(ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a)$$

$$c^{[-2]^{2n-4}}c\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,pa^{[-2]^{2n-4}}a\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,bc^{[-2]^{2n-4}}c\,(ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a)$$

$$(ac^{[-2]^{2n-4}}c\,a)^{[-2]}\underbrace{(ac^{[-2]^{2n-4}}c\,a)\ldots}_{2n-4}(ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a)) =$$

$$= (ab^{[-2]^{2n-4}}b\,aa^{[-2]^{2n-4}}a\,(ca^{[-2]^{2n-4}}a\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a)c^{[-2]^{2n-4}}c\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,p$$

$$a^{[-2]^{2n-4}}a\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,bc^{[-2]^{2n-4}}c\,(ab^{[-2]^{2n-4}}b\,aa^{[-2]^{2n-4}}a\,c)a^{[-2]^{2n-4}}a\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a) =$$

$$= (ab^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,cc^{[-2]^{2n-4}}c\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,p$$

$$a^{[-2]^{2n-4}}a\,ba^{[-2]^{2n-4}}a\,bc^{[-2]^{2n-4}}c\,cb^{[-2]^{2n-4}}b\,ab^{[-2]^{2n-4}}b\,a) = p$$

Следовательно, мы доказали справедливость равенства (2), а тем самым теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть a, b, c — произвольные точки из X. Произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин каждого из следующих шестиугольников: $\langle S_b(c),\ S_{S_b(a)}(S_b(c)),\ S_{S_c(a)}(S_b(c)),\ S_{S_c(b)}(S_b(c)),\ S_{S_a(b)}(S_b(c)),\ S_{S_a(c)}(S_b(c))\rangle$, $\langle S_b(a),\ S_{S_c(a)}(S_b(a)),\ S_{S_c(b)}(S_b(a)),\ S_{S_a(b)}(S_b(a)),\ S_{S_a(c)}(S_b(a)),\ S_{S_b(c)}(S_b(a))\rangle$, $\langle S_c(a),\ S_{S_c(b)}(S_c(a)),\ S_{S_a(b)}(S_c(a)),\ S_{S_a(c)}(S_c(a)),\ S_{S_b(c)}(S_c(a)),\ S_{S_b(a)}(S_c(a))\rangle$, $\langle S_c(b),\ S_{S_a(b)}(S_c(b)),\ S_{S_a(c)}(S_c(b)),\ S_{S_b(c)}(S_c(b)),\ S_{S_b(a)}(S_c(b)),\ S_{S_c(a)}(S_c(b))\rangle$, $\langle S_a(b),\ S_{S_a(c)}(S_a(b)),\ S_{S_b(c)}(S_a(b)),\ S_{S_b(a)}(S_a(b)), S_{S_c(a)}(S_a(b)),\ S_{S_c(b)}(S_a(b))\rangle$, т.е. справедливы равенства*

$$S_{S_{S_a(c)}(S_b(c))}(S_{S_{S_a(b)}(S_b(c))}(S_{S_{S_c(b)}(S_b(c))}(S_{S_{S_c(a)}(S_b(c))}(S_{S_{S_b(a)}(S_b(c))}(S_{S_b(c)}(p)))))) = p, \qquad (7)$$

$$S_{S_{S_b(c)}(S_b(a))}(S_{S_{S_a(c)}(S_b(a))}(S_{S_{S_a(b)}(S_b(a))}(S_{S_{S_c(b)}(S_b(a))}(S_{S_{S_c(a)}(S_b(a))}(S_{S_b(a)}(p)))))) = p, \qquad (8)$$

$$S_{S_{S_b(a)}(S_c(a))}(S_{S_{S_b(c)}(S_c(a))}(S_{S_{S_a(c)}(S_c(a))}(S_{S_{S_a(b)}(S_c(a))}(S_{S_{S_c(b)}(S_c(a))}(S_{S_c(a)}(p)))))) = p, \qquad (9)$$

$$S_{S_{S_c(a)}(S_c(b))}(S_{S_{S_b(a)}(S_c(b))}(S_{S_{S_b(c)}(S_c(b))}(S_{S_{S_a(c)}(S_c(b))}(S_{S_{S_a(b)}(S_c(b))}(S_{S_c(b)}(p)))))) = p, \qquad (10)$$

$$S_{S_{S_c(b)}(S_a(b))}(S_{S_{S_c(a)}(S_a(b))}(S_{S_{S_b(a)}(S_a(b))}(S_{S_{S_b(c)}(S_a(b))}(S_{S_{S_a(c)}(S_a(b))}(S_{S_a(b)}(p)))))) = p. \qquad (11)$$

Теорема 2. *Если G — полуабелева n-арная группа, a, b, c, v — произвольные точки из X, то произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника*

$$\langle S_{S_b(a)}(v), S_{S_c(a)}(v), S_{S_c(b)}(v), S_{S_a(b)}(v), S_{S_a(c)}(v), S_{S_b(c)}(v)\rangle,$$

т.е. справедливо равенство

$$S_{S_{S_b(a)}(v)}(S_{S_{S_c(a)}(v)}(S_{S_{S_c(b)}(v)}(S_{S_{S_a(b)}(v)}(S_{S_{S_a(c)}(v)}(S_{S_{S_b(c)}(v)}(p)))))) = p. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Установим справедливость равенства (12). Для этого будем выполнять действия в скобках с учетом определения 4 из [3], равенства 3.28 из [2], предложения 1 из [5] и того, что для любого $x \in X$, последовательности $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ и $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ являются нейтральными $2(n-1)$-последовательностями.

Имеем

$$S_{S_{S_b(c)}(v)}(p) = (S_{S_b(c)}(v)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_{S_b(c)}(v)) =$$
$$= ((S_b(c)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}S_b(c))p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(S_b(c)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}S_b(c))) =$$
$$= ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b). \tag{13}$$

Поскольку

$$S_{S_a(c)}(v) = (S_a(c)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}S_a(c)) = ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)), \tag{14}$$

то, с учетом (13) и (14), имеем

$$S_{S_{S_a(c)}(v)}(S_{S_{S_b(c)}(v)}(p)) = ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}av^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)$$
$$(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}$$
$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}av^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) =$$
$$= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(av^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}v)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}p$$
$$b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(vb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) =$$
$$= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}cv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(vc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}p$$
$$b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) =$$
$$= (\underbrace{ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ldots}_{4}p\underbrace{b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a\ldots}_{4}). \tag{15}$$

Поскольку

$$S_{S_a(b)}(v) = (S_a(b)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}S_a(b)) = ((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)) \tag{16}$$

то, с учетом (15) и (16), имеем

$$S_{S_{S_{a(b)}(v)}}(S_{S_{S_{a(c)}(v)}}(S_{S_{S_{b(c)}(v)}}(p))) =$$

$$= ((ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a)(\underbrace{ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\ldots}_{4}p\,\underbrace{b^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a\ldots}_{4})^{[-2]}$$

$$\underbrace{(\underbrace{ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\ldots}_{4}p\,\underbrace{b^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a\ldots}_{4})\ldots}_{2n-4}(ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a)) =$$

$$= (ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a\,\underbrace{a^{[-2]}{}^{2n-4}a\;b\ldots}_{4}p^{[-2]}{}^{2n-4}p$$

$$\underbrace{ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\ldots}_{4}ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a) =$$

$$= (ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\,(av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;aa^{[-2]}{}^{2n-4}a\;b)a^{[-2]}{}^{2n-4}a\;ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p$$

$$ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\;ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\,(ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\;av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;a)b^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a) =$$

$$= (ab^{[-2]}{}^{2n-4}b\,(bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b)a^{[-2]}{}^{2n-4}a\;ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p$$

$$ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\;ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\,(av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b)b^{[-2]}{}^{2n-4}b\;a) =$$

$$= ((av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b)a^{[-2]}{}^{2n-4}a\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p\;ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\,(bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;a)) =$$

$$= ((bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;a)a^{[-2]}{}^{2n-4}a\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p\;ba^{[-2]}{}^{2n-4}a\,(av^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b)) =$$

$$= (bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p\;bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b). \qquad (17)$$

Поскольку

$$S_{S_{c(b)}}(v) = (S_c(b)v^{[-2]}{}^{2n-4}v\;S_c(b)) = ((cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c)v^{[-2]}{}^{2n-4}v\,(cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c)), \qquad (18)$$

то, с учетом (17) и (18), имеем

$$S_{S_{S_{c(b)}(v)}}(S_{S_{S_{a(b)}(v)}}(S_{S_{S_{a(c)}(v)}}(S_{S_{S_{b(c)}(v)}}(p)))) =$$

$$= ((cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c)(bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p\;bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b)^{[-2]}$$

$$\underbrace{(bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;bp^{[-2]}{}^{2n-4}p\;bv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;b)\ldots}_{2n-4}(cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cv^{[-2]}{}^{2n-4}v\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c)) =$$

$$= (cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cv^{[-2]}{}^{2n-4}v\,(cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;v)b^{[-2]}{}^{2n-4}b\;p$$

$$b^{[-2]}{}^{2n-4}b\,(vb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c)v^{[-2]}{}^{2n-4}v\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c) =$$

$$= (cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cv^{[-2]}{}^{2n-4}v\,(vb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c)b^{[-2]}{}^{2n-4}b\;p$$

$$b^{[-2]}{}^{2n-4}b\,(cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;v)v^{[-2]}{}^{2n-4}v\;cb^{[-2]}{}^{2n-4}b\;c) =$$

$$= (\underbrace{cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ldots}_{4}\,p\,\underbrace{b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c\ldots}_{4}). \tag{19}$$

Поскольку

$$S_{S_c(a)}(v) = (S_c(a)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}S_c(a)) = ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)), \tag{20}$$

то, с учетом (19) и (20), имеем

$$S_{S_{S_c(a)}(v)}(S_{S_{S_c(b)}(v)}(S_{S_{S_a(b)}(v)}(S_{S_{S_a(c)}(v)}(S_{S_{S_b(c)}(v)}(p))))) =$$

$$= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)(\underbrace{cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ldots}_{4}\,p\,\underbrace{b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c\ldots}_{4})^{[-2]}$$

$$\underbrace{(\underbrace{cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ldots}_{4}\,p\,\underbrace{b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c\ldots}_{4})\ldots}_{2n-4}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)) =$$

$$= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c\,\underbrace{c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,b\ldots}_{4}\,p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,\underbrace{bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ldots}_{4}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c$$

$$v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c) =$$

$$= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)) =$$

$$= ((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \tag{21}$$

Поскольку

$$S_{S_b(a)}(v) = (S_b(a)v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}S_b(a)) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b), \tag{22}$$

то, с учетом (21) и (22), имеем

$$S_{S_{S_b(a)}(v)}(S_{S_{S_c(a)}(v)}(S_{S_{S_c(b)}(v)}(S_{S_{S_a(b)}(v)}(S_{S_{S_b(c)}(v)}(p))))) = p,$$

т.е. мы установили справедливость равенства (12), а тем самым и справедливость теоремы 2.

Теорема доказана.

Резюме. Автор рассматривает самосовмещения элементов n-арной группы относительно некоторой последовательности элементов.

Abstract. The author considers a self-combination of elements in a n-ary group concerning some sequence of elements.

Литература

1. Александров, П.С. Введение в теорию групп / П.С. Александров; М.: Наука, 1980. — 144 с.

2. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1992. — 264 с.

3. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1998. — 182 с.

4. Кулаженко, Ю.И. Самосовмещение элементов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. Т.И. Васильевой, Гомель, 2002. — С. 66–71.

5. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 47–64.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 18.01.10