

УДК 539.12.01

**РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СОСТОЯНИЙ  
РАССЕЯНИЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ОРБИТАЛЬНЫМ  
КВАНТОВЫМ ЧИСЛОМ  $l = 1$** **В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины***RELATIVISTIC PARTIAL GREEN'S FUNCTIONS OF SCATTERING STATES  
CHARACTERIZED BY ORBITAL QUANTUM NUMBER  $l = 1$** **V.N. Kapshai, A.A. Grishechkina***Francisk Skorina Gomel State University*

Функции Грина квазипотенциального подхода квантовой теории поля найдены в релятивистском конфигурационном представлении и выражены через элементарные функции применительно к состояниям рассеяния, характеризуемым орбитальным квантовым числом  $l=1$  ( $p$ -состояниям). Определены асимптотические свойства функций Грина при больших значениях релятивистской координаты. Показано, что все функции Грина в нерелятивистском пределе совпадают с парциальной функцией Грина уравнения Шрёдингера. Уравнения для определения парциальных волновых функций состояний рассеяния решены точно в случае сферически-симметричных потенциалов « $\delta$ -сфера» и их суперпозиций. Определены характерные особенности поведения парциальных сечений рассеяния, обусловленные видом модельного потенциала.

**Ключевые слова:** функции Грина, квазипотенциальный подход, релятивистское конфигурационное представление, состояния рассеяния,  $p$ -состояния, дельта-потенциал.

Green's functions of the quasipotential approach of quantum field theory are found in the relativistic configurational representation and are expressed in terms of elementary functions in case of scattering states characterized by orbital quantum number  $l=1$  ( $p$ -states). Asymptotic properties of the Green's functions are determined at large values of the relativistic coordinate. It is shown that all the Green's functions coincide in the nonrelativistic limit with the partial Green's function of the Schrodinger equation. The equations for the corresponding partial wave functions of the scattering states are solved exactly in case of spherically symmetric potentials « $\delta$ -sphere» and their superpositions. Characteristic features of the behavior of partial scattering cross sections for such potentials are determined.

**Keywords:** Green's functions, quasipotential approach, relativistic configurational representation, scattering states,  $p$ -states, delta-function potential.

**Введение**

В современной релятивистской физике проблемы описания связанных состояний и состояний рассеяния относят к фундаментальным. Одним из первых уравнений, выведенных для их решения, стало уравнение Бете – Солпитера. Так как его использование сопряжено с рядом трудностей, в целях их разрешения позднее были предложены подходы, основанные на разных вариантах трехмерной редукции уравнения Бете – Солпитера. Наиболее удачным оказался квазипотенциальный подход, предложенный в работах Логунова и Тавхелидзе, и Кадышевского. Первоначально интегральные уравнения Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского были сформулированы в импульсном представлении. Если, по аналогии с квантовой механикой, осуществить преобразование Фурье этих уравнений, то можно свести их к интегрально-дифференциальным, то есть не менее сложным для решения. Приём, альтернативный трёхмерному преобразованию Фурье, состоит в разложении всех используемых в нём величин, таких как волновые функции, свободные функции Грина (ФГ),

квазипотенциалы по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца, образующим полную ортонормированную систему функций. Именно на этой основе была сформулирована концепция релятивистского конфигурационного представления (РКП), которое является аналогом координатного представления квантовой механики.

Эквивалентные интегральным уравнениям в импульсном представлении уравнения в РКП могут быть представлены или в виде дифференциально-разностных (при этом парциальные уравнения являются разностными), или в виде интегральных (парциальные уравнения в этом случае являются интегральными). При выборе второго варианта для практического использования уравнений в РКП существенно знание явного вида парциальных ФГ, аналогичных парциальным ФГ уравнения Шрёдингера.

Одномерные ФГ в РКП были найдены в [1], трехмерные парциальные ФГ были определены в [2] и записаны в терминах специальных функций. Явный вид парциальных ФГ для состояний с нулевым орбитальным моментом, реализуемых

для частиц, находящихся в сферически-симметричном потенциальном поле, был получен ранее и в виде сложных комбинаций элементарных функций [3]. Это обстоятельство служит мотивирующим фактором для выражения через элементарные функции и других парциальных ФГ.

Целью настоящей работы является нахождение в элементарных функциях явного вида парциальных ФГ для состояний, характеризующихся орбитальным квантовым числом  $l=1$ . Располагая таким вариантом представления ФГ можно сформулировать парциальные уравнения состояний рассеяния в удобном для практического применения виде. Мы демонстрируем это на примере сферически-симметричных дельта-потенциалов в РКП (решение разностных уравнений с такими потенциалами представляет очень непростую задачу).

### 1 Релятивистские парциальные функции Грина

Функции Грина системы двух частиц одинаковой массы  $m$  для состояний рассеяния в импульсном представлении определены в [1] в виде

$$\begin{aligned} G_{(1)}(E_q, k) &= \frac{1}{2E_k - 2E_q - i\varepsilon} \frac{1}{E_k}; \\ G_{(2)}(E_q, k) &= \frac{1}{E_k^2 - E_q^2 - i\varepsilon} \frac{m}{E_k}; \\ G_{(3)}(E_q, k) &= \frac{1}{E_k^2 - E_q^2 - i\varepsilon}; \\ G_{(4)}(E_q, k) &= \frac{1}{2E_k - 2E_q - i\varepsilon} \frac{m}{E_k^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $G_{(1)}$  – ФГ модифицированного уравнения Кадышевского,  $G_{(2)}$  – ФГ уравнения Логунова – Тавхелидзе,  $G_{(3)}$  – ФГ модифицированного уравнения Логунова – Тавхелидзе,  $G_{(4)}$  – ФГ уравнения Кадышевского,  $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ ,  $k$  – релятивистский импульс,  $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$  – энергия системы в рассматриваемом состоянии рассеяния.

Парциальные ФГ в РКП  $G_{1(j)}(\chi_q, r, r')$  для состояний с орбитальным квантовым числом  $l=1$  в [2] выражены через функции (1.1) следующим образом:

$$G_{1(j)}(\chi_q, r, r') = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty p_1(\chi_k, r) G_{(j)}(m \operatorname{ch} \chi_q, k) \times \\ \times E_k m^2 \operatorname{sh}^2 \chi_k P_1^*(\chi_k, r') d\chi_k, \quad (1.2)$$

где функция  $p_1(\chi_k, r)$  имеет вид

$$p_1(\chi_k, r) = \frac{r}{(mr+i)\operatorname{sh}^2 \chi_k} \times \\ \times \left( \frac{\operatorname{ch} \chi_k \sin(\chi_k mr)}{mr} - \operatorname{sh} \chi_k \cos(\chi_k mr) \right),$$

$\chi_k$  – быстрота, связанная с релятивистским импульсом соотношением  $k = m \operatorname{sh} \chi_k$ ,  $r$  – модуль радиус-вектора  $\vec{r}$  в РКП.

Рассмотрим процедуру нахождения явного вида ФГ модифицированного уравнения Кадышевского на основе формулы (1.2). Для этого представим её в виде выражения

$$G_{1(1)}(\chi_q, r, r') = \frac{-mr r'}{\pi(mr+i)(mr'-i)} \times \\ \times \left( \frac{1}{2} (I_1(r-r') + I_1(r+r')) - \left( \frac{1}{2mr} - \frac{1}{2mr'} \right) \times \right. \\ \times I_2(r-r') - \left( \frac{1}{2mr} + \frac{1}{2mr'} \right) I_2(r+r') + \\ \left. + \frac{1}{2m^2 r r'} (I_3(r-r') - I_3(r+r')) \right), \quad (1.3)$$

в котором использованы обозначения

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\chi_k mr)}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \\ I_2(r) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \chi_k \sin(\chi_k mr)}{\operatorname{sh}(\chi_k + i\gamma) (\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} d\chi_k, \\ I_3(r) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 \chi_k \sin(\chi_k mr)}{\operatorname{sh}^2(\chi_k + i\gamma) (\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon))} d\chi_k. \end{aligned}$$

Бесконечно малая мнимая часть  $\gamma$  аргумента функции  $\operatorname{sh}(\chi_k + i\gamma)$ , аналогично  $\varepsilon$  в формулах (1.1), введена для смещения особой точки подынтегральной функции с вещественной оси в комплексную плоскость. Однако, в отличие от  $\varepsilon$ , положительность которой принципиально важна, знак вспомогательной величины  $\gamma$  может быть любым, и при его изменении на противоположный ответ не изменяется. Так, в подынтегральном выражении разности интегралов  $I_3(r-r') - I_3(r+r')$  содержится множитель

$$\sin(\chi_k mr) \sin(\chi_k mr') \operatorname{sh}^{-2}(\chi_k + i\gamma),$$

имеющий устранимую особенность при  $\chi_k = 0$ .

Для вычисления интеграла  $I_1(r)$  представим его в виде

$$I_1(r) = (I_{11}(r) + I_{11}(-r))/4,$$

где

$$I_{11}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi_k mr}}{\operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k. \quad (1.4)$$

Для вычисления интеграла (1.4) воспользуемся методами теории функций комплексной переменной [4]. Перейдем в комплексную  $\chi_k$ -плоскость, рассматривая вместо интеграла (1.4) вдоль вещественной прямой интеграл по замкнутому контуру  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  (рисунок 1.1). После преобразования интегралов вдоль каждого из

отрезков контура  $C$  и последующего устремления  $R \rightarrow \infty$  получим связь искомого интеграла  $I_{11}(r)$  с интегралом по контуру  $C$ :

$$I_{11}(r) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi mr}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{i\chi_k mr}}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k. \quad (1.5)$$

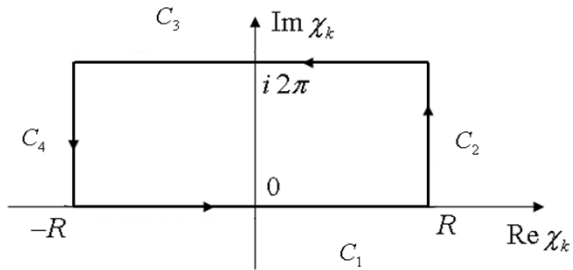


Рисунок 1.1 – Контур интегрирования  $C$  в комплексной  $\chi_k$ -плоскости

Значение интеграла в (1.5) можно определить, применяя теорему о вычетах [4], [5]. После определения координат полюсов, попадающих внутрь контура интегрирования

$$(\chi_{k01} = \chi_q + i\varepsilon, \chi_{k02} = -\chi_q + i(2\pi - \varepsilon)),$$

и значений вычетов в них [6], для интеграла  $I_{11}$  в пределе  $\varepsilon \rightarrow +0$  получим выражение

$$I_{11}(r) = \frac{2\pi i}{\text{sh } \chi_q} \frac{\text{sh}((i\chi_q + \pi)mr)}{\text{sh}(\pi mr)}. \quad (1.6)$$

С учетом (1.6) интеграл  $I_1(r)$  приведем к виду

$$I_1(r) = \frac{\pi i}{\text{sh } \chi_q} \frac{\text{sh}((i\chi_q + \pi)mr)}{\text{sh}(\pi mr)}. \quad (1.7)$$

Интеграл  $I_2(r)$  содержит  $\sin(\chi_k mr)$  в числителе и  $\text{sh}(\chi_k + i\gamma)$  в знаменателе, следовательно, в точке  $\chi_k = 0$  подынтегральная функция имеет устранимую особенность. Представим  $I_2(r)$  в виде  $I_2(r) = (I_{21}(r) - I_{21}(-r))/4i$ , где

$$I_{21}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch } \chi_k}{\text{sh}(\chi_k + i\gamma)} \frac{e^{i\chi_k mr}}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k.$$

В результате применения вышеизложенного метода для интеграла  $I_{21}(r)$  в пределе  $\gamma, \varepsilon \rightarrow +0$  получим

$$I_{21}(r) = \frac{\pi i}{\text{sh}(\pi mr)} \left[ \frac{e^{-\pi mr}}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} + \frac{\text{ch } \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} 2 \text{ch}((i\chi_q + \pi)mr) \right]. \quad (1.8)$$

Воспользуемся выражением (1.8) и представим  $I_2(r)$  в виде

$$I_2(r) = \frac{\pi}{2 \text{sh}(\pi mr)} \left[ \frac{\text{ch}(\pi mr)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} + \right.$$

$$\left. + \frac{\text{ch } \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} 2 \text{ch}((i\chi_q + \pi)mr) \right]. \quad (1.9)$$

Применяя тот же метод сведения интеграла вдоль вещественной прямой к интегралу по замкнутому контуру, для интеграла  $I_3$  в пределе  $\gamma, \varepsilon \rightarrow +0$  получим

$$I_3(r) = \frac{\pi i}{2 \text{sh}(\pi mr)} \left[ \frac{\text{imr ch}(\pi mr)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{\text{imr}}{1 + \text{ch } \chi_q} + \frac{\text{ch}^2 \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} 2 \text{ch}((i\chi_q + \pi)mr) \right]. \quad (1.10)$$

Подставляя соотношения (1.7), (1.9) и (1.10) в (1.3), можно получить выражение для ФГ в РКП модифицированного уравнения Кадышевского. Аналогично получаются выражения для ФГ трёх других (см. пояснения после формулы (1.1)) рассматриваемых нами уравнений. Для краткости представим их в компактном виде

$$G_{1(j)}(\chi_q, r, r') = \frac{-1}{(mr + i)(mr' - i)} \times (G_{1(j)}(\chi_q, r - r') + G_{1(j)}(\chi_q, r + r')), \quad (1.11)$$

В развёрнутой записи функции  $G_{1(j)}(\chi_q, \rho)$  для каждого из уравнений соответственно имеют вид

$$G_{1(1)}(\chi_q, \rho) = \frac{i m r r' \text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho)}{2 \text{sh } \chi_q \text{sh}(\pi m\rho)} + \frac{(-1)^k \rho}{2 \text{sh}(\pi m\rho)} \left[ \frac{\text{ch}(\pi m\rho)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} + 2 \frac{\text{ch } \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} \text{ch}((i\chi_q + \pi)m\rho) \right] + \frac{(-1)^k i}{4 \text{sh}(\pi m\rho)} \times (1.12)$$

$$\times \left[ \frac{i\rho \text{ch}(\pi m\rho)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{i\rho}{1 + \text{ch } \chi_q} + \frac{2 \text{ch}^2 \chi_q}{m \text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho) \right],$$

$$G_{1(2)}(\chi_q, \rho) = \frac{\text{imr} r' \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m\rho)}{\text{sh } 2\chi_q \text{sh}(\pi m\rho/2)} + \frac{(-1)^k \rho}{2 \text{sh}(\pi m\rho)} \left[ \frac{\text{ch}(\pi m\rho) + 1}{1 - \text{ch}^2 \chi_q} + \frac{2 \text{ch}(\pi m\rho/2) \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m\rho)}{\text{sh}^2 \chi_q} \right] + \frac{(-1)^k i}{2 \text{sh}(\pi m\rho)} \left[ \frac{i\rho (\text{ch}(\pi m\rho) + 1)}{1 - \text{ch}^2 \chi_q} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \text{ch } \chi_q}{m \text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m\rho) \text{ch}(\pi m\rho/2) \right],$$

$$G_{1(3)}(\chi_q, \rho) = \frac{i m r r' \operatorname{ch}((i\chi_q + \pi/2)m\rho)}{2 \operatorname{sh} \chi_q \operatorname{ch}(\pi m\rho/2)} + \frac{(-1)^k \rho}{2 \operatorname{sh}(\pi m\rho)} \left[ \frac{\operatorname{ch}(\pi m\rho) - 1}{1 - \operatorname{ch}^2 \chi_q} + 2 \frac{\operatorname{ch} \chi_q}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \operatorname{sh}(\pi m\rho/2) \operatorname{sh}((i\chi_q + \pi/2)m\rho) \right] + (1.14)$$

$$+ \frac{(-1)^k i}{2 \operatorname{sh}(\pi m\rho)} \times \left[ \frac{i\rho(\operatorname{ch}(\pi m\rho) - 1)}{1 - \operatorname{ch}^2 \chi_q} + \frac{2 \operatorname{ch}^2 \chi_q}{m \operatorname{sh}^3 \chi_q} \operatorname{ch}((i\chi_q + \pi/2)m\rho) \operatorname{sh}(\pi m\rho/2) \right],$$

$$G_{1(4)}(\chi_q, r, r') = \frac{i m r r'}{\operatorname{sh} 2\chi_q} \left[ \frac{i \operatorname{sh} \chi_q}{\operatorname{ch}(\pi m\rho/2)} + \frac{2 \operatorname{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho)}{\operatorname{sh}(\pi m\rho)} \right] + \frac{(-1)^k \rho}{2 \operatorname{sh}(\pi m\rho)} \times \left[ \frac{\operatorname{ch}(\pi m\rho)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{2 \operatorname{ch}((i\chi_q + \pi)m\rho)}{\operatorname{sh}^2 \chi_q} \right] + \frac{i(-1)^k}{2 \operatorname{sh}(\pi m\rho)} \left[ \frac{i\rho \operatorname{ch}(\pi m\rho)}{1 - \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{i\rho}{1 + \operatorname{ch} \chi_q} + \frac{2 \operatorname{ch} \chi_q}{m \operatorname{sh}^3 \chi_q} \operatorname{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho) \right]. (1.15)$$

В выражениях (1.12)–(1.15) коэффициент  $k = 1$  при  $\rho = r + r'$  и  $k = 2$  при  $\rho = r - r'$ .

Произведем анализ полученных функций Грина. На рисунках 1.2, 1.3 изображены графики зависимостей действительной и мнимой частей функций Грина (1.11) от  $r$ , рассчитанных при  $r' = 1$  и  $\chi_q = 1$ . На этих графиках можно выделить следующую особенность: при больших значениях  $r$  функции Грина уравнений Логанова – Тавхелидзе и Кадышевского ведут себя одинаково. Также одинаково ведут себя функции Грина модифицированных уравнений. Действительно, асимптотическое поведение ФГ (1.11) при  $r \rightarrow \infty$  описывается формулами

$$G_{1(j)}(\chi_q, r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong K_{(j)}(r') e^{i\chi_q m r}, (1.16)$$

в которых

$$K_{(1)}(r') = K_{(3)}(r') = \frac{-i r'}{m r' - i} \left( \frac{\cos(\chi_q m r')}{\operatorname{sh} \chi_q} - \frac{\operatorname{cth} \chi_q \sin(\chi_q m r')}{m r' \operatorname{sh} \chi_q} \right),$$

$$K_{(2)}(r') = K_{(4)}(r') =$$

$$= \frac{-i r'}{m r' - i} \left( \frac{2 \cos(\chi_q m r')}{\operatorname{sh} 2\chi_q} - \frac{\sin(\chi_q m r')}{m r' \operatorname{sh}^2 \chi_q} \right).$$

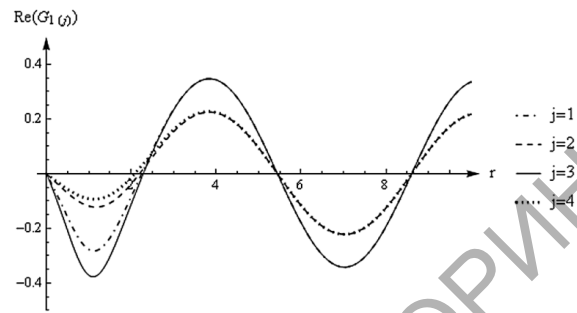


Рисунок 1.2 – Зависимость действительной части функций Грина (1.11) от координаты  $r$

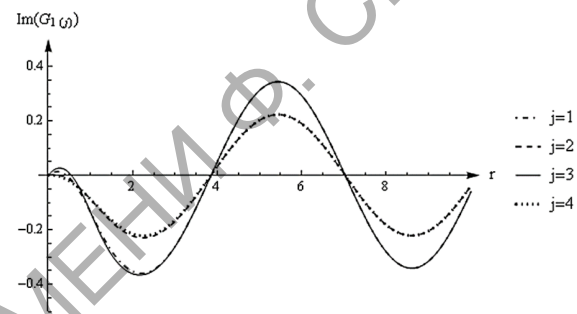


Рисунок 1.3 – Зависимость мнимой части функций Грина (1.11) от координаты  $r$

В нерелятивистском пределе (при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\chi_q \rightarrow 0$ ) все четыре рассмотренные ФГ преобразуются в записанную в координатном представлении ФГ трёхмерного уравнения Шрёдингера для  $p$ -состояния [7]:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \chi_q \rightarrow 0}} G_{1(j)}(\chi_q, r, r') = G_0(q, r, r') = \begin{cases} -\frac{1}{q} e^{iqr} \left( i \cos(qr') - \frac{1}{r'q} i \sin(qr') - \frac{1}{rq} \cos(qr') + \frac{1}{r r' q^2} \sin(qr') \right); & r > r', \\ -\frac{1}{q} e^{iqr} \left( i \cos(qr) - \frac{1}{rq} i \sin(qr) - \frac{1}{r'q} \cos(qr) + \frac{1}{r r' q^2} \sin(qr) \right); & r < r', \end{cases}$$

где  $q$  – нерелятивистский импульс,  $r$  – модуль радиус-вектора  $\vec{x}$  в обычном координатном представлении.

## 2 Решение релятивистских уравнений с дельта-потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении

Рассмотрим уравнение для парциальных волновых функций  $p$ -состояний рассеяния:

$$\psi_{(j)}(r) = m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, r) + \int_0^\infty G_{1(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(r') dr', \quad (2.1)$$

где индексом  $j = 1, 2, 3, 4$  устанавливается соответствие с рассматриваемым уравнением. При использовании модельного потенциала « $\delta$ -сфера»:

$$V_1(r) = V_0 \delta(r - a), \quad (2.2)$$

уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\psi_{(j)}(r) = m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, r) + G_{1(j)}(\chi_q, r, a) V_0 \psi_{(j)}(a). \quad (2.3)$$

Чтобы определить константу  $\psi_{(j)}(a)$ , рассмотрим (2.3) в точке  $r = a$ :

$$\psi_{(j)}(a) = m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a) + G_{1(j)}(\chi_q, a, a) V_0 \psi_{(j)}(a).$$

Это линейное алгебраическое уравнение относительно величины  $\psi_{(j)}(a)$  легко решается:

$$\psi_{(j)}(a) = \frac{m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a)}{1 - V_0 G_{1(j)}(\chi_q, a, a)}. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), получим выражение для волновой функции

$$\psi_{(j)}(r) = m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, r) + G_{1(j)}(\chi_q, r, a) V_0 \frac{m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a)}{1 - V_0 G_{1(j)}(\chi_q, a, a)}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим характер изменения волновой функции (2.5) при больших значениях релятивистской переменной  $r$ :

$$\psi_{(j)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = m \operatorname{sh} \chi_q \left( p_1(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} + f_{1(j)}^1(\chi_q) (-i) e^{im\chi_q r} m \operatorname{sh} \chi_q \right).$$

Здесь  $f_{1(j)}^1(\chi_q)$  – релятивистская амплитуда рассеяния, которая выражается через функцию Грина следующим образом:

$$f_{1(j)}^1(\chi_q) = iK_{(j)}(a) V_0 \frac{p_1(\chi_q, a)}{1 - V_0 G_{1(j)}(\chi_q, a, a)}.$$

Парциальное сечение рассеяния для  $p$ -волны может быть выражено через амплитуду рассеяния  $f_{1(j)}^1(\chi_q)$ :

$$\sigma_{1(j)}^1(\chi_q) = 12\pi \left| f_{1(j)}^1(\chi_q) \right|^2. \quad (2.6)$$

На рисунке 2.1 приведены зависимости сечения рассеяния от быстроты  $\chi_q$ , рассчитанные при фиксированных значениях параметров  $a = 5$ ,  $V_0 = 2$ ,  $m = 1$ .

Отметим некоторые особенности анализируемых парциальных сечений рассеяния:

- при увеличении параметра  $a$  максимальные значения сечения рассеяния увеличиваются;

- при увеличении параметра  $V_0$  вблизи нулей функции  $\sigma_{1(j)}^1(\chi_q)$  появляются дополнительные пики;

- при увеличении параметра  $m$  максимумы сечения рассеяния смещаются в область меньших значений параметра  $\chi_q$ .

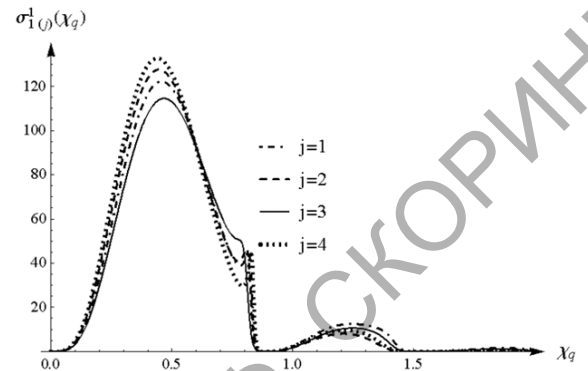


Рисунок 2.1 – Зависимость парциального сечения рассеяния  $\sigma_{1(j)}^1$  от  $\chi_q$

Сравним полученные нами результаты с теми, которые ранее были получены в [8] при решении аналогичной задачи для  $s$ -состояний рассеяния. Приведем на рисунке 2.2 графики зависимости сечения рассеяния от быстроты  $\chi_q$ , рассчитанные на основе решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при  $l = 0, 1$  и использованных в предыдущем фрагменте значениях параметров ( $a = 5$ ,  $V_0 = 2$ ,  $m = 1$ ).

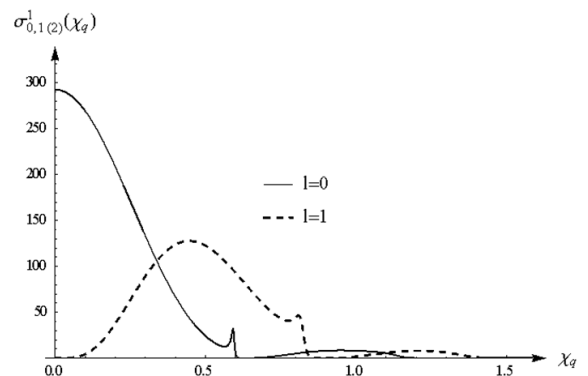


Рисунок 2.2 – Зависимость парциального сечения рассеяния  $\sigma_{0,1(2)}^1$  от  $\chi_q$ , рассчитанного на основе решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при  $l = 0, 1$

Анализируя рисунок 2.2, видим, что локальные максимумы сечения рассеяния для  $p$ -состояния по сравнению с максимумами для  $s$ -состояния смещены в направлении больших значений быстроты  $\chi_q$ , что обусловлено следствием наличия центробежного барьера.

### 3 Решение релятивистских уравнений при моделировании взаимодействия суперпозицией двух дельта-потенциалов в релятивистском конфигурационном представлении

Теперь представим содержащийся в релятивистском уравнении потенциал суперпозицией двух потенциалов « $\delta$ -сфера»:

$$V_2(r) = V_{01}\delta(r - a_1) + V_{02}\delta(r - a_2). \quad (3.1)$$

С учетом потенциала (3.1) уравнение (2.1) приведем к виду

$$\begin{aligned} \Psi_{(j)}(r) &= m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, r) + \\ &+ G_{1(j)}(\chi_q, r, a_1) V_{01} \Psi_{(j)}(a_1) + \\ &+ G_{1(j)}(\chi_q, r, a_2) V_{02} \Psi_{(j)}(a_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Содержащиеся в (3.2) значения функций  $\Psi_{(j)}(a_1)$  и  $\Psi_{(j)}(a_2)$  можно определить, вычисляя функции  $\Psi_{(j)}(r)$  в точках  $r = a_1$  и  $r = a_2$ . В результате их подстановки в (3.2) получим алгебраическую систему уравнений, которую удобно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 - V_{01} G_{1(j)}(\chi_q, a_1, a_1) & -V_{02} G_{1(j)}(\chi_q, a_1, a_2) \\ -V_{01} G_{1(j)}(\chi_q, a_2, a_1) & 1 - V_{02} G_{1(j)}(\chi_q, a_2, a_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Psi_{(j)}(a_1) \\ \Psi_{(j)}(a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a_1) \\ m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a_2) \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений, выражения для  $\Psi_{(j)}(a_1)$  и  $\Psi_{(j)}(a_2)$  можно записать в виде

$$\Psi_{(j)}(a_1) = \frac{\Delta_{1(j)}(\chi_q)}{\Delta_{(j)}(\chi_q)}, \quad \Psi_{(j)}(a_2) = \frac{\Delta_{2(j)}(\chi_q)}{\Delta_{(j)}(\chi_q)},$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{(j)}(\chi_q) &= \prod_{n=1}^2 [1 - V_{0n} G_{1(j)}(\chi_q, a_n, a_n)] - \\ &- V_{01} V_{02} (G_{1(j)}(\chi_q, a_1, a_2))^2; \\ \Delta_{1(j)}(\chi_q) &= \\ &= m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a_1) [1 - V_{02} G_{1(j)}(\chi_q, a_2, a_2)] + \\ &+ V_{02} m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a_2) G_{1(j)}(\chi_q, a_1, a_2); \\ \Delta_{2(j)}(\chi_q) &= \\ &= m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a_2) [1 - V_{01} G_{1(j)}(\chi_q, a_1, a_1)] + \\ &+ V_{01} m \operatorname{sh} \chi_q p_1(\chi_q, a_1) G_{1(j)}(\chi_q, a_2, a_1). \end{aligned}$$

При  $r \rightarrow \infty$  выражение (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{(j)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} &= m \operatorname{sh} \chi_q (p_1(\chi_q, r)) \Big|_{r \rightarrow \infty} + \\ &+ G_{1(j)}(\chi_q, r, a_1) \Big|_{r \rightarrow \infty} V_{01} \Psi_{(j)}(a_1) + \\ &+ G_{1(j)}(\chi_q, r, a_2) \Big|_{r \rightarrow \infty} V_{02} \Psi_{(j)}(a_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

С учетом асимптотических выражений ФГ (1.16) в соотношении (3.3) получим

$$\begin{aligned} \Psi_{(j)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} &= m \operatorname{sh} \chi_q (p_1(\chi_q, r)) \Big|_{r \rightarrow \infty} + \\ &+ f_{1(j)}^2(\chi_q) (-i) e^{im\chi_q r} m \operatorname{sh} \chi_q, \end{aligned}$$

при этом релятивистская амплитуда рассеяния  $f_{1(j)}^2(\chi_q)$ , соответствующая уравнению с модельным потенциалом (3.1), выражается аналитически:

$$\begin{aligned} f_{1(j)}^2(\chi_q) &= \\ &= \frac{K_{(j)}(a_1) V_{01} \Psi_{(j)}(a_1) + K_{(j)}(a_2) V_{02} \Psi_{(j)}(a_2)}{-im \operatorname{sh} \chi_q}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Парциальное сечение рассеяния для  $p$ -состояния выражается через амплитуду рассеяния в соответствии с формулой (2.6). Характер его зависимости от быстроты  $\chi_q$  для всех четырех ФГ иллюстрирован на рисунке 3.1 в виде графиков, построенных при  $a_1 = 3$ ,  $V_{01} = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $V_{02} = 2$ ,  $m = 1$ .

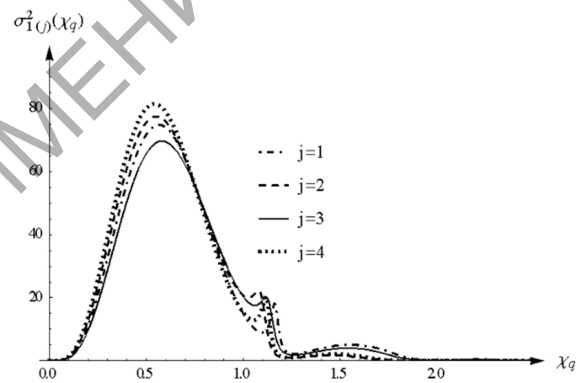


Рисунок 3.1 – Зависимость парциального сечения рассеяния  $\sigma_{1(j)}^2$  от  $\chi_q$

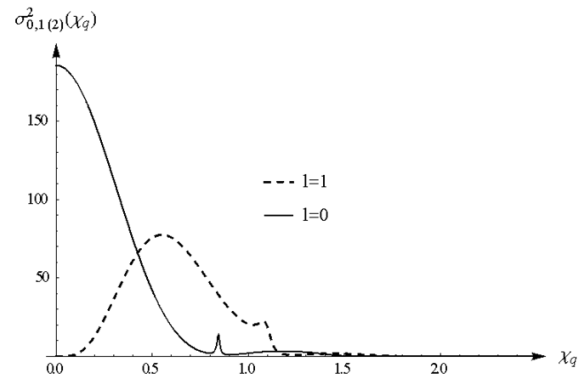


Рисунок 3.2 – Зависимость парциального сечения рассеяния  $\sigma_{0,1(2)}^2$  от  $\chi_q$ , рассчитанная с учетом решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при  $l = 0, 1$

Для удобства сравнения с результатами, ранее полученными в [8] применительно к  $s$ -состояниям, на рисунке 3.2 для рассматриваемых четырёх уравнений приведены графики зависимости сечения рассеяния от быстроты  $\chi_q$ , рассчитанные на основе решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при  $l = 0, 1$  и следующих значениях других параметров:  $a_1 = 3$ ,  $V_{01} = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $V_{02} = 2$ ,  $m = 1$ .

Очевидно, что и в этом случае в сечении рассеяния  $p$ -состояния имеет место сдвиг максимумов в направлении больших значений быстроты  $\chi_q$  по сравнению с положением максимумов в сечении рассеяния  $s$ -состояния.

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена задача об изучении состояний рассеяния системы двух релятивистских частиц с использованием релятивистского конфигурационного представления. Необходимые для решения этой задачи явные выражения функций Грина получены для  $p$ -состояний, характеризующихся орбитальным квантовым числом  $l = 1$ . Подробно описана методика нахождения волновых функций, парциальных амплитуд рассеяния и сечений рассеяния с использованием модельных потенциалов двух видов: « $\delta$ -сфера» и суперпозиция двух потенциалов « $\delta$ -сфера». Результаты расчета зависимости парциальных сечений рассеяния от быстроты иллюстрированы графически и сопоставлены с результатами, полученными в [8] для  $s$ -состояний рассеяния.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kapshai, V.N. One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two  $\delta$  potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45, № 1. – P. 1–9.
2. Kapshai, V.N. Partial quasipotential equations in the relativistic configuration representation / V.N. Kapshai, S.I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2018. – Vol. 60, № 10. – P. 1696–1704.
3. Капшай, В.Н. Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. ст. – Минск: Ин-т физики НАН Беларуси. – 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.
4. Arfken, G.B. Mathematical methods for physicists / G.B. Arfken, H.J. Weber, F.E. Harris. – 7th ed. – New York: Elsevier, 2013. – 1205 p.
5. Гельфонд, А.О. Вычеты и их приложения / А.О. Гельфонд. – М.: Ленанд, 2018. – 114 с.
6. Wunsch, A.D. Complex variables with applications / A.D. Wunsch. – 3rd ed. – New York: RAW, 2005. – 676 p.
7. Тейлор, Дж. Теория рассеяния: квантовая теория нерелятивистских столкновений / Дж. Тейлор. – Москва: Мир, 1975. – 568 с.
8. Капшай, В.Н. Релятивистская задача о  $s$ -состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов « $\delta$ -сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12

Поступила в редакцию 20.07.2021.