МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ КОММУТАНТАМИ *B*-ПОДГРУПП

В.Н. Княгина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FINITE GROUPS WITH SUBNORMAL DERIVED SUBGROUPS OF *B*-GROUPS

V.N. Kniahina

Francisk Skorina Gomel State University

Конечная ненильпотентная группа называется *B*-группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы нильпотентны. В настоящей работе устанавливается метанильпотентность конечной группы, у которой коммутант каждой *B*-подгруппы субнормален.

***Ключевые слова**: конечная группа*, *B-группа*, *субнормальная подгруппа*, *коммутант*.

A finite non-nilpotent group G is called *B*-group if every proper subgroup of the quotient group $G / \Phi(G)$ is nilpotent. In this paper, it is established that the metanilpotency of a finite group for which the derived subgroup of each *B*-subgroup is subnormal.

Keywords: *finite group*, *B-group*, *subnormal subgroup*, *derived subgroup.*

Введение

Группой Шмидта называется ненильпотентная конечная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны [1]. Так как группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в любой ненильпотентной конечной группе, то они являются универсальными объектами в теории конечных групп, а их свойства и расположение существенно влияют на строение всей группы. Строение конечных групп по свойствам содержащихся в них подгрупп Шмидта исследовалось, например, в работах Я.Г. Берковича, В.А. Ведерникова, В.Д. Мазурова, В.С. Монахова, С.Ф. Каморникова, В.Н. Княгиной, Э.М. Пальчика, А.Н. Скибы, и других авторов.

Впервые конечные группы, у которых все подгруппы Шмидта субнормальны, изучались в работе В.Н. Семенчука [2], который установил, что такие группы метанильпотентны. В работе В.С. Монахова и В.Н. Княгиной [3] найдены инварианты конечных групп, у которых субнормальны некоторые типы подгрупп Шмидта (p-замкнутые, p-нильпотентные, сверхразрешимые, несверхразрешимые). В этой работе в качестве следствия отмечается нильпотентность коммутанта конечной группы, у которой все подгруппы Шмидта субнормальны. Позже в работе В.А. Ведерникова [4] доказано, что фактор-группа по коммутанту циклическая.

Если подгруппа Шмидта S конечной группы G субнормальна, то ее коммутант S' – также субнормальная подгруппа группы G. В любой p-замкнутой $\{p, q\}$-группе, силовская q-подгруппа которой нециклическая, коммутанты всех подгрупп Шмидта субнормальны, и есть несубнормальные подгруппы Шмидта.

По теореме В.П. Буриченко [5] для каждой конечной группы G найдется группа K и ее абелева нормальная подгруппа N такая, что фактор-группа K / N изоморфна G, и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из K содержатся в N. В коммутанте любой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки и порядок 4, поэтому в группе K из теоремы В.П. Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в группе N, поэтому субнормальны в G. Следовательно, любая конечная группа может быть фактор-группой конечной группы с субнормальными коммутантами подгрупп Шмидта.

Я.Г. Беркович предложил [6, с. 461] называть *B*-группой конечную группу, у которой фактор-группа по подгруппе Фраттини – группа Шмидта. Начальные свойства *B*-групп установлены в работе В.Н. Княгиной. В строении *B*-группы и группы Шмидта есть как сходства, так и различия. Так, *B*-группа, как и группа Шмидта, бипримарна, одна из ее силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая, см. лемму 2.2 [7]. Однако, если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в *B*-группе это свойство нарушается. Примером служит диэдральная группа порядка 18, она является *B*-группой и не является группой Шмидта.

В настоящей работе устанавливается метанильпотентность конечной группы, у которой коммутант каждой *B*-подгруппы субнормален.

1 Вспомогательные результаты

Рассматриваются только конечные группы. В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [8], [9].

Напомним, что группа G называется метанильпотентной, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что K и фактор-группа G / K – нильпотентные группы.

Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается [A]B. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $Y \le X$ $(Y < X)$ означает, что Y –подгруппа (собственная) группы X.

Следуя [10] будем использовать обозначения $S_{\langle p,q\rangle}$ для группы Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой. B-группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.

Приведем используемые при доказательстве теоремы свойства B-групп.

***Лемма* 1.1** [7, лемма 2.2]. *Пусть B – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, P и Q – ее силовские p- и q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) B = [P]Q;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P/\Phi(P)$ – *главный фактор группы B порядка* p^m, где m – *показатель числа p по модулю q*;

(3) $Q = \langle y\rangle$ – *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(B)$. *Кроме того,*

$$\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q\rangle$$

и

$$Z(B) \le \Phi(B);$$

(4) *если H – нормальная в B подгруппа и $H \ne B$, то H нильпотентна*;

(5) *если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и* $M = P \times \langle y^q\rangle$, *либо* $M = [\Phi(P)]Q^x$ *для некоторого* $x \in B$.

***Лемма* 1.2** [7, лемма 2.5]. *Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

Также понадобятся следующие результаты.

***Лемма* 1.3** [11, лемма 8] *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.*

***Лемма* 1.4** [12, лемма 1.1]. *Пусть M – максимальная подгруппа группы G и $K \le M$. Если подгруппа K субнормальна в G, то $K \le M_G$. В частности, если K – максимальная подгруппа в M и M ненормальна в G, то $K = M_G$.*

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** Если в конечной группе коммутант каждой B-подгруппы является субнормальной подгруппой, то группа метанильпотентна.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G.

Если в группе нет B-подгрупп, то она нильпотентна. Пусть R – собственная подгруппа группы G, L – B-подгруппа из R, K – коммутант группы L. По условию теоремы коммутант K субнормален в G, а по лемме 2.41 [9] K субнормален в R. Значит условия теоремы наследуются всеми подгруппами группы G.

Так группа G содержит B-подгруппу L и по условию $1 \ne L'$ субнормальна в G, то группа G непроста. Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим фактор-группу G / N. Если она не содержит B-подгрупп, то она нильпотентна. Пусть в G / N есть B-подгруппа U / N. По лемме 1.2 минимальное добавление U_1 к N будет B-подгруппой, то есть $U = U_1N$. По условию теоремы коммутант подгруппы U_1 субнормален в G. Следовательно, коммутант фактор-группы U / N

$$(U/N)' = U'N/N = (U_1N)'N/N =$$
$$= U_1'N'[U_1,N]N/N = U_1'N'N/N = U_1'N/N$$

субнормален в G/N. Здесь учитывалось, что $[U_1, N]$ – подгруппа группы N, а также, что

$$U' = U_1'N'[U_1,N],$$

[9, лемма 4.8]. Значит условия теоремы распространяются на фактор-группы. По индукции G / N метанильпотентна.

Класс метанильпотентных групп – насыщенная формация. По лемме 1.3 G – примитивная группа, т. е. G = [N]M, $\Phi(G) = 1$, $F(G) = N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа, M – максимальная в G подгруппа и $M_G = 1$.

Если подгруппа M ненильпотентна, то в ней содержится подгруппа Шмидта S. По условию теоремы коммутант группы S субнормален в G. Но по лемме 1.4 S' содержится в $M_G = 1$, противоречие. Если M нильпотентна, тогда $G/N \simeq M$ нильпотентна. Так как G разрешима, то N – элементарная абелева p-подгруппа. Следовательно, G метанильпотентна. □

Пример. Пусть p и q – различные простые числа и G – p-замкнутая $\{p, q\}$-группа с неабелевой силовской q-подгруппой. Такой группой является, например, группа $[E_{5^2}]Q_8$ (SmallGroup (200,44), [13]), здесь E_{5^2} – элементарная абелева группа порядка 25, а Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Поскольку каждая B-подгруппа группы G p-замкнута, то коммутант каждой B-подгруппы субнормален в G.

Этот пример показывает, что в теореме метанильпотентность группы нельзя ослабить до нильпотентности ее коммутанта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт*, *О.Ю*. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. *Семенчук*, *В.Н*. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.

3. *Княгина*, *В.Н*. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

4. *Ведерников*, *В.А*. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

5. *Буриченко*, *В.П*. О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу / В.П. Буриченко // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92, № 3. – С. 361–367.

6. *Berkovich*, *Y*. Groups of Prime Power Order, Vol. 3 / Y. Berkovich, Z. Janko. – Walter de Gruyter, 2011. – 639 p.

7. *Княгина*, *В.Н*. О произведении *B*-группы и примарной группы / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.

8. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.

9. *Монахов*, *В.С*. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

10. *Монахов*, *В.С*. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Укр. матем. конгресс: сб. тр. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины. – 2002. – С. 81–90.

11. *Монахов*, *В.С*. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

12. *Коновалова*, *М.Н*. Конечные группы с некоторыми субнормальными 2-максимальными подгруппами / М.Н. Коновалова, В.С. Монахов // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – Т. 43, № 2. – С. 75–79.

13. *GAP – Groups*, *Algorithms*, *Programming – a System for Computational Discrete Algebra* [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.gap-system.org. – Date of access: 15.02.2021.

Поступила в редакцию 01.07.2021.