УДК 512.542

ОБОБЩЕННО σ-СУБНОРМАЛЬНЫЕ И σ-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова[1,2], А.Н. Скиба[2]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

GENERALIZED σ-SUBNORMAL AND σ-PERMUTABLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova[1,2], A.N. Skiba[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, где $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$. σ-свойством группы называют всякое ее свойство, не зависящее от выбора разбиения σ множества $\mathbb{P}$. Данная работа посвящена дальнейшему изучению σ-свойств группы. Обобщены многие известные результаты.

Ключевые слова: *конечная группа*, *σ-нильпотентная группа*, *σ-разрешимая группа*, *σ-субнормальная подгруппа*, *группа Шмидта.*

Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, where $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ for all $i\neq j$. A σ-property of a group is any of its properties that do not depend on the choice of the partition σ of the set $\mathbb{P}$. This work is devoted to further the study of the σ-properties of a group. A lot of known results are generalized.

Keywords: *finite group*, *σ-nilpotent group*, *σ-soluble group*, *σ-subnormal subgroup*, *Schmidt group.*

Введение

В данной статье все группы конечны и G всегда означает конечную группу; $\mathcal{L}(G)$ обозначает решетку всех подгрупп группы G; $\pi(G)$ – это набор всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппа A группы G называется $\mathfrak{F}w$*-нормальной* (соответственно, $\mathfrak{F}$*-нормальной*) в G, если $A^G/A_G\in\mathfrak{F}$ (соответственно, если либо $A\trianglelefteq G$, либо $A_G\neq A^G$ и каждый главный фактор H/K группы G между A_G и A^G является $\mathfrak{F}$*-центральным* в G [1], т. е.

$$(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))\in\mathfrak{F}.$$

В дальнейшем, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, где $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$, и мы полагаем, следуя [2], [3],

$$\sigma(G)=\{\sigma_i \mid \sigma_i\cap\pi(G)\neq\varnothing\}.$$

Кроме того, $\Pi\subseteq\sigma$ и $\Pi'=\sigma\setminus\Pi$. Группа G называется: Π-группой, если $\sigma(H)\subseteq\Pi$; Π-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i\in\Pi$. Символ $O_\Pi(G)$ обозначает подгруппу группы G, порожденную всеми ее Π-подгруппами.

Группа G называется [4]: σ*-разрешимой*, если каждый главный фактор H/K группы G является σ*-примарным*, т. е. H/K является σ_i-группой для некоторого $i=i(H/K)$; σ*-нильпотентной*, если $G=G_1\times\cdots\times G_t$ для некоторых σ-примарных групп $G_1,\ldots,G_t$; *мета*-σ*-нильпотентной*, если G является расширением σ-нильпотентной группы при помощи σ-нильпотентной группы.

Мы используем символы $\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ для обозначения классов всех σ-разрешимых групп и всех σ-нильпотентных групп соответственно; $\mathfrak{N}_\sigma^2$ – класс всех мета-σ-нильпотентных групп.

Напомним также, что подгруппа A группы G называется σ*-субнормальной* в G [4], если в G имеется цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_n=G$$

такая, что либо $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – σ-примарная группа для всех $i=1,\ldots,n$.

Понятно, что G разрешима (соответственно нильпотентна) тогда и только тогда, когда G σ-разрешима (соответственно σ-нильпотентна), где $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$; подгруппа A субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ^1-субнормальна в G.

Множество всех σ-субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_\sigma(G)$ и, в частности, множество всех субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_{sn}(G)$ образуют подрешетки в решетке $\mathcal{L}(G)$ (см. [4] и [5] соответственно). Это важное свойство σ-субнормальных подгрупп предопределило возможность использования таких подгрупп при анализе многих открытых вопросов (см., например, недавние статьи [2]–[4], [6]–[19]).

Широкие серии других подрешеток решетки $\mathcal{L}(G)$ были найдены в недавних статьях [3], [12] (см. также [10]–[22]). В частности, было доказано (см. теорему 1.4 в [3]), что если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация Фиттинга, то набор $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}wn}(G)$, состоящий из всех $\mathfrak{F}w$-нормальных подгрупп, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$, и если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}n}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}$-нормальных подгрупп, также образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

В данной статье мы анализируем дальнейшие применения решеток $\mathcal{L}_\sigma(G)$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}wn}(G)$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}n}(G)$, используя для этого следующие обобщения σ-субнормальности.

***Определение* 0.1.** Мы говорим, что подгруппа H группы G является:

(i) $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$*-вложенной* (соответственно $\mathfrak{F} \wedge \sigma$*-вложенной*) в G, если $H = A \cap B$ для некоторой $\mathfrak{F}w$-нормальной (соответственно, для некоторой $\mathfrak{F}$-нормальной) подгруппы A и σ-субнормальной подгруппы B группы G.

(ii) *слабо* $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$*-вложенной* (соответственно *слабо* $\mathfrak{F} \wedge \sigma$*-вложенной*) в G, если для некоторой σ-субнормальной подгруппы T и некоторой $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$-вложенной (соответственно, $\mathfrak{F} \wedge \sigma$-вложенной) подгруппы S в G имеет место $G = HT$ и $H \cap T \le S \le H$.

Множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}w\wedge\sigma}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$-вложенных подгрупп группы G, образует *meet-подрешётку* [23, стр. 7] решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е. $A \cap B \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}w\wedge\sigma}(G)$ для любых двух подгрупп $A, B \in L_{\mathfrak{F}\wedge sn}(G)$; ещё одна meet-подрешетка в $\mathcal{L}(G)$ – множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\wedge\sigma}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F} \wedge \sigma$-вложенных подгрупп в G.

Отметим, что любая $\mathfrak{F}w$-нормальная подгруппа $A = A \cap G$ группы G $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$-вложена, а каждая σ-субнормальная подгруппа $B = G \cap B$ является $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложенной в группу. Аналогично, каждая $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа $\mathfrak{F} \wedge \sigma$-вложена в группу. Отметим, наконец, что каждая $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$-вложенная подгруппа является слабо $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$-вложенной и всякая $\mathfrak{F} \wedge \sigma$-вложенная подгруппа является слабо $\mathfrak{F} \wedge \sigma$-вложенной.

Теперь рассмотрим следующий пример, в котором $\mathfrak{U}$ – это класс всех сверхразрешимых групп.

***Пример* 0.2.** Пусть p, q – простые числа, где q делит $p-1$ и $\{p,q\} \cap \{2,3\} = \varnothing$. Пусть $H = Q \rtimes C_p$, где Q – простой $\mathbb{F}_q C_p$-модуль, точный для C_p. Пусть P – $\mathbb{F}_p H$-модуль, точный для H. Пусть $A = P \rtimes (Q \rtimes A_p)$. Группа PQ сверхразрешима, поскольку q делит $p-1$, поэтому некоторая подгруппа Z группы P порядка p нормальна в PQ.

(1) Пусть $G = A \times A_4$, где A_4 – знакопеременная группа степени 4. Пусть $V = ZQ \times C_2$, где C_2 – подгруппа группы A_4 порядка 2. Тогда $V = AC_2 \cap ZQA_4$.

Пусть теперь $\sigma = \{\{p\},\{q\},\{2,3\},\{p,q,2,3\}'\}$. Тогда AC_2 σ-субнормальна в G и ZQA_4 $\mathfrak{U}w$-нормальна в G, но не $\mathfrak{U}$-нормальна, поскольку $(ZQB)^G = PQA_4$ и $(ZQA_4)_G = A_4$. Следовательно, V – $\mathfrak{U}w \wedge \sigma$-вложенная, но не $\mathfrak{U} \wedge \sigma$-вложенная в G подгруппа.

Наконец, покажем, что V не является ни σ-субнормальной, ни $\mathfrak{F}w$-нормальной в G. Предположим, что V σ-субнормальна в G. Тогда $V \cap A = ZQ$ является σ-субнормальной и, следовательно, субнормальной в PQ. Но тогда $ZQ = ZQ^{PQ} = PQ$, противоречие. Следовательно, V не является σ-субнормальной в G. Аналогично, V не является $\mathfrak{U}w$-нормальной в G, поскольку $V^G / V_G = AA_4 / A \simeq A_4$ не является свехразрешимой группой.

(2) Пусть $B = C_p \rtimes C_q$ – неабелева группа порядка pq и $G = A \times B$ и пусть $H = ZC_q$.

Тогда $H = AC_q \cap LB$, где AC_q – $\mathfrak{U}$-нормальная в G подгруппа и LB субнормальна в G. Следовательно, H $\mathfrak{U} \wedge \sigma$-вложена в G, где $\sigma = \sigma^1$. Ясно, что $H_G = 1$ и $H^G = QB$, поэтому H не $\mathfrak{U}$-нормальна в G, так как главный фактор $Q/1$ в G не циклический. Отметим также, что подгруппа H не субнормальна в G [24, гл. A, лемма 14.1 (a)], поскольку $C_q = H \cap B$ не является субнормальной в B.

Приведенные выше наблюдения лежат в основе возможных приложений введенных нами понятий. И такие приложения уже найдены в классическом случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$ [25].

В данной работе мы очень кратко анализируем общий случай.

1 Группы с обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта

Напомним, что *группа Шмидта* – это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Хорошо известно что характер вложения подгрупп Шмидта в группу во многом определяет ее структуру.

Нашими первыми результатами являются следующие три теоремы, развивающие многие известные результаты и, в частности, развивающие соответствующие результаты работы [25].

***Теорема* 1.1** [26, теорема A]. *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G является* $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$*-вложенной в G. Тогда*

(i) *G* σ-разрешима в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\sigma$, и

(ii) *G* является мета-σ-нильпотентной в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\sigma^2$.

***Теорема* 1.2.** *Если G разрешима и каждая подгруппа Шмидта группы G* $\mathfrak{N}_\sigma^2 \wedge \sigma$*-вложена в G, то G является мета-σ-нильпотентной.*

***Следствие* 1.3** (Семенчук [27]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G является субнормальной в G, то G метанильпотентна.*

***Теорема* 1.4** (см. теорему B в [26]). *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G является* $\mathfrak{F} \wedge \sigma$*-вложенной в G, где* $\mathfrak{F}$ *– класс всех групп X с σ-нильпотентной производной подгруппой* X'. *Если G разрешима, то производная подгруппа* G' *группы G также σ-нильпотентна.*

***Следствие* 1.5** (Монахов, Княгина [28]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G является субнормальной в G, то производная подгруппа* G' *группы G нильпотентна.*

Напомним, что подгруппа *M* в *G* называется *модулярной*, если *M* – модулярный элемент (в смысле Куроша [23, 2, стр. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп в *G*, т. е.

(i) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$ и

(ii) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

Ввиду теоремы 5.2.5 из [23] каждая модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$-нормальна в группе. Отсюда и из теоремы 1.4 получаем следующее

***Следствие* 1.6** (Близнец, Селькин [29]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа* G' *группы G нильпотентна.*

2 Группы со слабо $\mathfrak{S}_\sigma w \wedge \sigma$-вложенными подгруппами

Цепь подгрупп $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы *G* называется максимальной, если каждый ее член является максимальной подгруппой в следующим за ним членом этой цепи.

***Теорема* 2.1** [26, теорема C]. *Если в каждой максимальной цепи* $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ *группы G хотя бы одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *слабо* $\mathfrak{S}_\sigma w \wedge \sigma$*-вложена в G, то G σ-разрешима.*

Этот результат также покрывает многие известные результаты. В частности, имеют место следующие его следствия.

***Следствие* 2.2** (Го, Скиба [6]). *Если в каждой максимальной цепи* $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ *группы G хотя бы одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *σ-субнормальна в G, то G σ-разрешима.*

***Следствие* 2.3** (Спенсер [31]). *Если в каждой максимальной цепи* $\cdots < M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ *группы G одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *субнормальна в G, то G разрешима.*

***Следствие* 2.4** (Шмидт [32]). *Группа G является разрешимой, если каждая ее 3-максимальная подгруппа модулярна в G.*

3 Усиление основных результатов теории *S*-перестановочных и σ-перестановочных подгрупп

Подгруппа *H* группы *G* называется *S*-перестановочной в *G* [33], [34], если *H* перестановочна с каждой силовской подгруппой *P* группы *G*, т. е. *HP* = *PH*. Подгруппа *H* группы *G* называется π-квазинормальной [35], [36] или π-перестановочной в *G*, если *H* перестановочна с каждой силовской *p*-подгруппой группы *G* для всех $p \in \pi$.

Основными результатами теории *S*-перестановочных и π-перестановочных подгрупп являются следующие теоремы.

***Теорема* 3.1** (Кегель [35]). *Если π-подгруппа H группы G π-перестановочна в G, тогда H субнормальна в G.*

***Теорема* 3.2** (Дескинз [36]). *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, тогда секция* H / H_G *нильпотентна.*

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующий факт.

***Теорема* 3.3.** *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, тогда секция* H^G / H_G *нильпотентна.*

***Теорема* 3.4** (Кегель [35]). *Множество всех π-перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой в* $\mathcal{L}(G)$.

***Теорема* 3.5** (Айзекс [37]). *Если π-подгруппа H группы G* π'*-перестановочна в G, тогда* H^G *обладает нильпотентной холловой* π'*-подгруппой.*

Первые три результата были обобщены в рамках теории σ-свойств группы в работе [4], которая явилась основной мотивацией к дальнейшему анализу результатов теории *S*-перестановочных и π-перестановочных подгрупп в рамках теории σ-свойств в работах [9], [38]. Существенным недостатком всех полученных в этом направлении результатов является то обстоятельство, что в классическом случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ все они не являются новыми и поэтому они ничего не дают для дальнейшего анализа и развития теории *S*-перестановочных и π-перестановочных подгрупп.

В данной работе мы обсуждаем идею, позволяющую устранить этот недостаток исследований [4], [9], [38].

Мы говорим, следуя [1], что подгруппа *H* группы *G* является:

(i) Π-*полупроектором* в *G*, если HN/N – максимальная Π-подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы *N* группы *G*.

(ii) Π-*проектором* в *G*, если *H* является Π-полупроектором в любой подгруппе группы *G*, содержащей *H*.

В случае, когда $\Pi = \{\sigma_i\}$ для некоторого *i*, мы применяем термин σ_i-*полупроектор* вместо $\{\sigma_i\}$-*полупроектор*.

***Определение* 3.6.** Мы говорим, что $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ является Π-*накрывающей системой подгрупп для H в G*, если все элементы множества $\mathcal{X}$ являются σ-примарными подгруппами в *G* и для каждого $\sigma_i \in \sigma(H) \cap \Pi$ найдутся индекс *j* и σ_i-полупроектор *U* в *H* такие, что $U \le X_j$.

***Замечание* 3.7.** (1) Если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ и π – некоторое множество простых чисел, то всякая π-накрывающая система подгрупп $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_t\}$ для *H* в *G* состоит из примарных подгрупп группы *G* и для каждого $p \in \pi(H) \cap \pi$ найдутся индекс *j* и силовская *p*-подгруппа *U* в *H* такие, что $U \le X_j$.

(2) Если силовская *p*-подгруппа *P* группы *G* перестановочна с подгруппой *H* группы *G*, то $H \cap P$ – силовская *p*-подгруппа в *H* и поэтому всякое множество $\mathcal{P}$ силовских подгрупп группы *G*, перестановочных с *H*, является π-накрывающей системой подгрупп для *H* в *G* при условии, что $\pi \subseteq \pi(\mathcal{P})$ и $\pi(H) \subseteq \pi$.

***Теорема* 3.8** [26, теорема D]. *Пусть H – Π-подгруппа группы G и пусть $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ – Π-накрывающая система подгрупп для H в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{X}$ и $x \in E := (X_1 \cdots X_t)^G$, то подгруппа H является σ-субнормальной в G и $H^G \le O_\Pi(G)$.*

(ii) *Кроме того, секция H/H_E является σ-нильпотентной.*

Ввиду замечания 3.7, мы получаем из теоремы 3.8 следующие классические результаты.

***Следствие* 3.9** (Кегель [35]). *Если π-подгруппа H группы G π-перестановочна в G, то H субнормальна в G.*

***Следствие* 3.10** (Дескинз [36]). *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, то секция H/H_G нильпотентна.*

***Следствие* 3.11.** *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, то секция H^G/H_G нильпотентна.*

Теперь, в качестве дальнейшей иллюстрации, мы даем еще три следствия теоремы 3.8 в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, которые являются развитием теорем 3.1 и 3.2 соответственно.

***Следствие* 3.12.** *Пусть H – π-подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в H для всех $i = 1, \ldots, t$. Если в G имеются такие примарные подгруппы $X_1, \ldots, X_t$, что $P_i \le X_i$ и H перестановочна с X_i^x для всех i и $x \in G$, то H субнормальна в G.*

***Следствие* 3.13.** *Пусть H – подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в H для всех $i = 1, \ldots, t$. Если H перестановочна с P_i^x для всех i и $x \in G$, то H субнормальна в G.*

***Следствие* 3.14.** *Пусть H – подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в H для всех $i = 1, \ldots, t$. Если в G имеются такие примарные подгруппы $X_1, \ldots, X_t$, что $P_i \le X_i$ и H перестановочна с X_i^x для всех i и $x \in G$, то секция H/H_E, где $E = (X_1 \cdots X_t)^G$, нильпотентна.*

В самом общем случае из теоремы 3.8 вытекает следующий новый результат теории σ-свойств конечной группы, усиливающий соответствующие наблюдения работ [4], [38].

***Следствие* 3.15.** *Пусть H – подгруппа в G и пусть $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ – полное холлово σ-множество в H. Если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{H}$ и $x \in G$, то подгруппа H является σ-субнормальной в G.*

Наша следующая теорема является развитием основного результата работы [37].

***Теорема* 3.16** [26, теорема E]. *Пусть H – Π-подгруппа группы G и пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_r\}$ – Π'-накрывающая система подгрупп для H^G в G. Если H^G является Π'-полной группой силовского типа и $HY^x = Y^xH$ для всех $Y \in \mathcal{Y}$ и $x \in G$, то группа H^G обладает σ-нильпотентной холловой Π'-подгруппой.*

***Следствие* 3.17** (Айзекс [37]). *Если* π*-подгруппа H группы G* π'*-перестановочна в G, то* H^G *обладает нильпотентной холловой* π'*-подгруппой.*

***Следствие* 3.18.** *Пусть H –* π*-подгруппа группы G и пусть* $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ *–* π'*-накрывающая система подгрупп для* H^G *в G. Если* $HP^x = P^x H$ *для всех* $P \in \mathcal{P}$ *и* $x \in G$, *то группа* H^G *обладает нильпотентной холловой* π'*-подгруппой.*

Теорема 3.8 служит мотивацией для следующего нашего определения.

***Определение* 3.19.** Мы говорим, что подгруппа *H* группы *G* является *строго* σ*-субнормальной* в *G*, если H^G / H_G – σ-нильпотентная группа.

Следующая теорема является развитием теоремы 3.4.

***Теорема* 3.20** [26, теорема F]. (i) *Если подгруппа H является* Π*-полупроектором G, то множество всех сильно σ-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

(ii) *Если H является* Π*-проектором G, то множество всех σ-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.21** (Кегель [35]). *Множество всех* π*-перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой в* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.22** (Скиба [4]). *Пусть G – σ-полная группа силовского типа. Тогда набор всех σ-перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку в решетке всех σ-субнормальных подгрупп группы G.*

Теорема 3.20 позволяет получить и много новых результатов. В частности, из этой теоремы вытекают следующие факты.

***Следствие* 3.23.** *Если подгруппа H является холловой* π*-подгруппой G, то множество всех сильно субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.24.** *Если подгруппа H является холловой* π*-подгруппой G, то множество всех субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.25.** *Если подгруппа H является холловой* Π*-подгруппой G, то множество всех сильно σ-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.25.** *Если подгруппа H является холловой* Π*-подгруппой G, то множество всех σ-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.

2. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble *P*σT-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

3. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

4. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

5. *Wielandt*, *H.* Eine Verallgemenerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – № 45. – S. 200–244.

6. *Beidleman*, *J.C.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

7. *Al-Sharo*, *K.A.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

8. *Hu*, *B.* On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.

9. *Murashka*, *V.I.* On a generalization of the concept of *S*-permutable subgroup of a finite group / V.I. Murashka // Acta Math. Hung. – 2018. – Vol. 155, № 2. – P. 221–227.

10. *Hu*, *B.* Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

11. *Guo*, *W.* Finite groups whose *n*-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – Vol. 62. – P. 1355–1372.

12. *Skiba*, *A.N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.

13. *On σ-subnormality criteria in finite* σ-soluble groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4.

14. *On σ-subnormal subgroups of factorised finite groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – Vol. 559. – P. 195–202.

15. *Yi*, *X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560. – P. 181–191.

16. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.

17. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite 3'-groups / S.F. Kamornikov,

V.N. Tyutyanov // Ukranian Math. J. – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.

18. *Hu*, *B*. On the σ-nilpotent norm and the σ-nilpotent length of a finite group / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Glasgow Math. J. – 2021. – Vol. 63, № 1. – P. 121–132. – DOI: https://doi.org/10.1017/S0017089520000051.

19. *G-covering subgroup systems for some classes of* σ*-soluble groups* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.

20. *Hu*, *B*. Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – DOI: https://doi.org/10.1515/jgth-2018-0199.

21. *Chi*, *Z*. On two sublattices of the subgroup lattice of a finite group / Z. Chi, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 6. – P. 1035–1047. – DOI: https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0039.

22. *Chi*, *Z*. On a lattice characterization of finite soluble *PST*-groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Bull. Austral. Math. Soc. – 2019. – Vol. 101, № 2. – P. 247–254. – DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972719000741.

23. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de ruyter, 1994.

24. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

25. *A generalization of subnormality* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Mediterranean J. Math. – In Press.

26. *Safonova*, *I.N*. On some new ideas and results of the theory of σ-properties of a finite group / I.N. Safonova, A.N. Skiba. – Preprint, 2020.

27. *Семенчук*, *В.Н*. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп / В.Н. Семенчук; в книге: Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.

28. *Монахов*, *В.С*. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирск. матем. ж. – 2004. – Vol. 45, № 6. – С. 1316–1322.

29. *Близнец*, *И.В*. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – P. 36–38.

30. *Guo*, *W*. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China. Math. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.

31. *Spencer*, *A.E*. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – № 27. – P. 167–173.

32. *Schmid*, *R*. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmid // Abhan. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – № 34. – P. 115–125.

33. *Ballester-Bolinches*, *A*. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010.

34. *Ballester-Bolinches*, *A*. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // Special issue in honor of Reinhold Baer (1902-1979). Illinois J. Math. – 2003. – Vol. № 1–2. – P. 63–69.

35. *Kegel*, *O.H*. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – № 78. – S. 205–221.

36. *Deskins*, *W.E*. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – № 82. – P. 125–132.

37. *Isaacs*, *I.M*. Semipermutable π-subgroups / I.M. Isaacs // Arch. Math. – 2014. – № 102. – P. 1–6.

38. *Guo*, *W*. On Π-quasinormal subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // Monatshefte fur Mathematik. – 2016. – Vol. 185, № 3. – P. 1–11. – DOI: https://doi.org/ 10.1007/s00605-016-1007-9.

Исследования первого автора выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*проект* 20211328), *исследования второго автора поддержаны РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта* № Ф20Р-291.

Поступила в редакцию 15.06.2021.