Проблемы физики, математики и техники, № 3 (48), 2021

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ *l*-АРНОЙ ГРУППЫ $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

ON SETS OF GENERATORS OF *l*-ARY GROUP $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

В статье продолжается изучение установленной ранее связи между порождающими множествами группы A и порождающими множествами полиадической группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени произвольной группы A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Ключевые слова: *группа*, *l-арная группа*, *порождающее множество*.

The article goes on with the studies on the described earlier relationship between sets of generators in group A and sets of generators in polyadic group $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ with l-ary operation $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, that is defined on Cartesian power A^k of group A for arbitrary integer $l \geq 2$ and arbitrary substitution σ from the set $\mathbf{S}_k$ of all substitutions of the set $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Keywords: *group*, *l-ary group*, *set of generators.*

Введение

Данная статья, посвящённая изучению порождающих множеств l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 4.1 означает, что имеется в виду теорема 4.1 из раздела 4 в [1].

Отметим, что ранее автором изучались порождающие множества l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. В частности, в [2, следствие 4.5] установлено, что если полугруппа A с единицей порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, k делит $l-1$, то для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.

В [1] получен аналогичный результат (теорема 4.1) для l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$: *Пусть группа A порождается множеством M*, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *k делит* $l-1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [3], [4].

Основная цель данной статьи – нахождение условий, позволяющих заменить в указанных выше результатах порождающее множество $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ порождающим множеством $\mathbf{U}_j(M)$.

6 Порождающее множество $\mathbf{U}_j(M)$

Покажем, что возможна ситуация, при которой элемент $\mathbf{e}$ может быть исключён из порождающих множеств как l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, так и l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$.

***Теорема* 6.1**. *Пусть группа A порождается множеством M*, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, *существуют элементы*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}, v_1, v_2, \ldots, v_r \in M$$

такие, что

$$u_1u_2 \ldots u_{r+1} = v_1v_2 \ldots v_r = 1. \tag{6.1}$$

Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

Доказательство. По теореме 4.1 для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.Так как единица группы не принадлежит множеству M, то $\mathbf{e} \notin \mathbf{U}_j(M)$.

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. По лемме 4.1, если

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = (b_1, \ldots, b_k),$$

то

$$b_j = a_ja_{k+1}a_{2k+1} \ldots a_{rk+1}, \tag{6.2}$$

$$b_s = a_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \ldots a_{(r-1)k+m_s+1}$$

для любого $s \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k\}$, где m_s однозначно определяется из условия $\sigma^{m_s}(s) = j$. Так как для указанных s имеем $a_s = 1$, то

$$b_s = a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \ldots a_{(r-1)k+m_s+1}. \tag{6.3}$$

Если положить

$a_1 = u_1$, $a_{k+1} = u_2$, $a_{2k+1} = u_3$, … $a_{rk+1} = u_{r+1}$,

$$a_{m_s+1} = v_1,\ a_{k+m_s+1} = v_2, \ldots\ a_{(r-1)k+m_s+1} = v_r$$

для указанных выше s, то из (6.2) и (6.3) с учётом (6.1) следует

$$b_1 = \ldots = b_k = 1,$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{e},$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l \in \mathbf{U}_j(M)$. Следовательно, элемент $\mathbf{e}$ может быть исключён из порождающего множества $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. □

***Замечание* 6.1.** Выпишем в явном виде элементы $b_1, \ldots, b_k$, определяемые равенствами (6.2) и (6.3) для $j = 1$ в случае $\sigma=(1, 2, \ldots, k)$. Так как в этом случае из условия $\sigma^{m_s}(s) = 1$ следует

$$m_2 = k-1,\ m_3 = k-2, \ldots, m_{k-1} = 2,\ m_k = 1,$$

то

$$b_1 = a_1a_{k+1}a_{2k+1} \ldots a_{(r-1)k+1}a_{rk+1},$$
$$b_2 = a_ka_{2k}a_{3k} \ldots a_{(r-1)k}a_{rk},$$
$$b_3 = a_{k-1}a_{2k-1}a_{3k-1} \ldots a_{(r-1)k-1}a_{rk-1},$$
$$\ldots$$
$$b_{k-1} = a_3a_{k+3}a_{2k+3} \ldots a_{(r-2)k+3}a_{(r-1)k+3},$$
$$b_k = a_2a_{k+2}a_{2k+2} \ldots a_{(r-2)k+2}a_{(r-1)k+2}.$$

Доказательство следующей теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 6.1. Только вместо теоремы 4.1 используется предложение 4.1.

***Теорема* 6.2**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, существуют элементы*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}, v_1, v_2, \ldots, v_r \in M$$

такие, что

$$u_1u_2 \ldots u_{r+1} = v_1v_2 \ldots v_r = 1.$$

Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.

Следующие две теоремы являются следствиями теорем 6.1 и 6.2, если в них положить

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{r+1} = u,\ v_1 = v_2 = \ldots = v_r = v.$$

***Теорема* 6.3**. *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, существуют элементы $u, v \in M$ такие, что $u^{r+1} = v^r = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.*

***Теорема* 6.4**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащем её единицу, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, существуют элементы $u, v \in M$ такие, что $u^{r+1} = v^r = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.*

Следующие две теоремы являются формальными обобщениями теорем 6.3 и 6.4 соответственно, так как вытекают из них.

***Теорема* 6.5**. *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, d делит $r + 1$, c делит r, существуют элементы $u, v \in M$ такие, что $u^d = v^c = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.*

***Теорема* 6.6**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, d делит $r + 1$, c делит r, существуют элементы $u, v \in M$ такие, что $u^d = v^c = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.*

7 Следствия и примеры

Полагая в теоремах 6.1 и 6.3 $r = 2$, получим следующие два следствия.

***Следствие* 7.1.** *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, существуют элементы $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \in M$, такие, что $u_1u_2u_3 = v_1v_2 = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ $(2k + 1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{2k+1,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.*

***Следствие* 7.2.** *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, существуют элементы $u, v \in M$, такие, что $u^3 = v^2 = 1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ $(2k + 1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{2k+1,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$.*

Для теорем 6.2 и 6.4 справедливы следствия, аналогичные следствиям 7.1 и 7.2.

Следующий пример показывает, что в формулировке теореме 4.1 нельзя обойтись без элемента $\mathbf{e}$.

***Пример* 7.1**. Рассмотрим циклическую группу $A = \{1, a\}$, которая порождается множеством $M = \{a\}$. Тогда

$$A^2 = \{\mathbf{e} = (1, 1),\ \mathbf{u} = (1, a),\ \mathbf{v} = (a, 1),\ \mathbf{w} = (a, a)\},$$
$$\mathbf{U}_1(M) = \{\mathbf{v}\},\ \mathbf{U}_2(M) = \{\mathbf{u}\},\ \mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Согласно теореме 4.1, каждое из множеств

$$\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}, \mathbf{v}\},\ \mathbf{U}_2(M) \cup \{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}, \mathbf{u}\}$$

порождает тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$.

Так как

$$[\mathbf{uuu}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},\ [\mathbf{vvv}]_{3,(12),2} = \mathbf{u},$$
$$[\mathbf{uuv}]_{3,(12),2} = [\mathbf{vuu}]_{3,(12),2}] = \mathbf{u},$$
$$[\mathbf{vvu}]_{3,(12),2} = [\mathbf{uvv}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},$$
$$[\mathbf{uvu}]_{3,(12),2} = \mathbf{u},\ [\mathbf{vuv}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},$$

то $< \mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, [\ ]_{3,(12),2} >$ – тернарная подгруппа тернарной группы $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$. Следовательно, каждое из множеств $\mathbf{U}(M)$, $\mathbf{U}_1(M)$ и $\mathbf{U}_2(M)$ не порождает тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$.

Равенства

$$[\mathbf{uuu}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},\ [\mathbf{vvv}]_{3,(12),2}] = \mathbf{u}$$

показывают, что порождающее множество $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ не является неприводимым, так как из него можно удалить либо элемент $\mathbf{u}$, либо элемент $\mathbf{v}$. Полученные порождающие множества $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{e}, \mathbf{v}\}$ будут уже неприводимыми.

Так как

$$[\mathbf{uuw}]_{3,(12),2} = \mathbf{e},\ [\mathbf{uwe}]_{3,(12),2} = \mathbf{v},$$

то $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ – еще одно порождающее множество, причем неприводимое. Неприводимым порождающим множеством является и множество $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, так как

$$[\mathbf{vvw}]_{3,(12),2} = \mathbf{e},\ [\mathbf{vwe}]_{3,(12),2} = \mathbf{u}.$$

Таким образом, тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождает каждое из следующих четырех двухэлементных неприводимых множеств

$$\{\mathbf{e}, \mathbf{u}\},\ \{\mathbf{e}, \mathbf{v}\},\ \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\},\ \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}.$$

Отметим, что последние два множества не содержат **e.**

Кроме множества $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождает также каждое из следующих трехэлементных множеств

$$\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\},\ \{\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\},\ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}.$$

***Замечание* 7.1.** Случай $r = 1$ исключён из теоремы 6.1, так как в этом случае множество $\mathbf{U}_j(M)$ может быть как порождающим, так и не порождающим. В примере 7.1, соответствующем случаю $r = 1$, множества $\mathbf{U}_1(M)$ и $\mathbf{U}_2(M)$ не являются порождающими для тернарной группы $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$. А в следующих примерах, для которых также $r = 1$, множество $\mathbf{U}_j(M)$ является порождающим для соответствующих тернарных групп.

***Пример* 7.2**. Циклическая группа A порядка 3, порожденная элементом a, порождается также двухэлементным множеством $M = \{a, a^2\}$. Тогда по теореме 4.1 тернарная группа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порядка 9 порождается множеством $\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, где

$$\mathbf{U}_1(M) = \{(a, 1), (a^2, 1)\},\ \mathbf{e} = (1, 1).$$

Так как

$$[(a, 1)(a, 1)(a, 1)(a^2, 1)(a, 1)]_{3,(12),2} = = (a^3, a^3) = (1, 1) = \mathbf{e},$$

то элемент **e** выражается с помощью тернарной операции $[\ ]_{3,(12),2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M)$. Следовательно, тернарная группа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождается двухэлементным множеством $\mathbf{U}_1(M)$. Двухэлементное множество $\mathbf{U}_2(M)$ также является порождающим для $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$.

***Пример* 7.3**. Циклическая группа $A = \mathbf{Z}_6$ порядка 6, порожденная элементом a, порождается также двухэлементным множеством $M = \{a^2, a^3\}$. Тогда по теореме 4.1 тернарная группа $< \mathbf{Z}_6^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порядка 36 порождается множеством $\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, где

$$\mathbf{U}_1(M) = \{(a^2, 1), (a^3, 1)\},\ \mathbf{e} = (1, 1).$$

Положим

$$\mathbf{u} = [(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)]_{3,(12),2},$$
$$\mathbf{v} = [(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)]_{3,(12),2},$$
$$\mathbf{w} = [(a^2, 1)\mathbf{uv}]_{3,(12),2}.$$

Так как

$$\mathbf{u} = (1, a^2),\ \mathbf{v} = (a^4, a^2),$$

то

$$\mathbf{w} = [(a^2, 1)(1, a^2)(a^4, a^2)]_{3,(12),2} = (a^2, a^2),$$

откуда

$$[\mathbf{www}]_{3,(12),2} = [(a^2, a^2)(a^2, a^2)(a^2, a^2)]_{3,(12),2} = = (1, 1) = \mathbf{e},$$

то есть $[\mathbf{www}]_{3,(12),2} = \mathbf{e}$.

Таким образом, элемент **e** выражается с помощью тернарной операции $[\ ]_{3,(12),2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M)$:

$$\mathbf{e} = [(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)$$
$$(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)$$
$$(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)]_{3,(12),2}.$$

Следовательно, тернарная группа $< \mathbf{Z}_6^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождается двухэлементным множеством $\mathbf{U}_1(M)$. Порождающим для этой тернарной группы является и двухэлементное множество $\mathbf{U}_2(M)$.

***Пример* 7.4**. Пусть как и в примере 7.3 $A = \mathbf{Z}_6$ – циклическая группа порядка 6, порождаемая множеством $M = \{a^2, a^3\}$. Тогда по следствию 7.2 ($u = a^2$, $v = a^3$) *для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ $(2k + 1)$*-арная группа* $< \mathbf{Z}_6^k, [\ ]_{2k+1,\sigma,k} >$ *порождается двухэлементным множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Пример 7.4 может быть извлечен и из следствия 7.2.

***Замечание* 7.2.** В примере 7.4 значению $k = 2$ соответствует 5-арная группа. Поэтому пример 7.3, в котором фигурирует тернарная группа, не может быть получен из примера 7.4.

Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_n$ порождается любым из следующих четырёх множеств [5]:

$$M_1 = \{\alpha_1 = (1\ 2),\ \alpha_2 = (1\ 2\ \ldots\ n)\};$$
$$M_2 = \{\alpha_1 = (1\ 2),\ \alpha_2\alpha_1 = (2\ 3\ \ldots\ n)\};$$
$$M_3 = \{\beta_1 = (1\ 2),\ \beta_2 = (2\ 3),\ \ldots,\ \beta_{n-1} = (n-1\ n)\};$$
$$M_4 = \{\gamma_1 = (1\ n),\ \gamma_2 = (2\ n),\ \ldots,\ \gamma_{n-1} = (n-1\ n)\},$$

то теорема 4 1 позволяет сформулировать следствие, в котором ε – тождественная подстановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbf{e} = (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})$.

***Следствие* 7.3.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, k *делит* $l - 1$, *порождается любым из следующих четырёх множеств*:

$$\mathbf{U}_j(M_1) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_2, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$

$$\mathbf{U}_j(M_2) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_2\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$

$$\mathbf{U}_j(M_3) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \beta_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), \ldots, (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \beta_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$

$$\mathbf{U}_j(M_4) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \gamma_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), \ldots, (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \gamma_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\}.$$

В частности, порождающими являются следующие множества:

$$\mathbf{U}_1(M_1) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha_2, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$
$$\mathbf{U}_1(M_2) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha_2\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$
$$\mathbf{U}_1(M_3) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\beta_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), \ldots, (\beta_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$
$$\mathbf{U}_1(M_4) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\gamma_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), \ldots, (\gamma_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\}.$$

Для некоторых l в следствии 7.3 элемент $\mathbf{e}$ может быть удалён из порождающего множества l-арной группы $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$.

Так как для чётного n
$$(1\ 2)^n = (2\ 3\ \ldots\ n)^{n-1} = \varepsilon,$$
то, полагая в теореме 6.3 $r = n - 1$, $u = (1\ \ 2)$, $v = (2\ 3\ \ldots\ n)$, получим

***Следствие* 7.4.** *Для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, где $n \geq 4$ – чётное, $l = (n-1)k + 1$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M_2) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (2\ 3\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

В частности, она порождается множеством
$$\mathbf{U}_1(M_2) = \{((1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), ((2\ 3\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1})\}.$$

Так как для нечётного n
$$(1\ 2\ \ldots\ n)^n = (1\ 2)^{n-1} = \varepsilon,$$
то, полагая в теореме 6.3 $r = n - 1$, $u = (1\ 2\ \ldots\ n)$, $v = (12)$, получим

***Следствие* 7.5.** *Для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, где $n \geq 3$ – нечётное, $l = (n-1)k + 1$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M_1) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

В частности, она порождается множеством
$$\mathbf{U}_1(M_1) = \{((1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), ((1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1})\}.$$

***Пример* 7.5**. Так как $(1\ \ 2\ \ 3)^3 = (1\ \ 2)^2 = \varepsilon$, то положив в следствии 7.5 $n = 3$, $k = 2$, $j = 1$, получим 5-арную группу $< \mathbf{S}_3^2, [\ ]_{5, (12), 2} >$, которая согласно этому следствию порождается двухэлементным множеством $\{((1\ 2\ 3), \varepsilon), ((1\ \ 2), \varepsilon)\}$.

Равенство, позволяющее выразить элемент $\mathbf{e}$ с помощью 5-арной операции $[\ ]_{5, (12), 2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M_1)$ имеет вид

$$[((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)$$
$$((1\ 2\ 3), \varepsilon)]_{5, (12), 2} = ((1\ 2\ 3)^3, (1\ 2)^2) = (\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{e}.$$

Это равенство получается из равенства, завершающего доказательство теоремы 6.1, из которой извлечена теорема 6.3.

Так как для нечётного n
$$(1\ 2)^{n+1} = (1\ 2\ \ldots\ n)^n = \varepsilon,$$
то, полагая в теореме 6.3 $r = n$, $u = (1\ \ 2)$, $v = (1\ 2\ \ldots\ n)$, получим

***Следствие* 7.6.** *Для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ $(nk+1)$-арная группа $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{nk+1, \sigma, k} >$, где $n \geq 3$ – нечётное, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M_1) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

В частности, она порождается множеством
$$\mathbf{U}_1(M_1) = \{((1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), ((1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1})\}.$$

***Пример* 7.6**. Так как $(1\ \ 2)^4 = (1\ \ 2\ \ 3)^3 = \varepsilon$, то положив в следствии 7.6 $n = 3$, $k = 2$, $j = 1$, получим 7-арную группу $< \mathbf{S}_3^2, [\ ]_{7, (12), 2} >$, которая согласно этому следствию порождается двухэлементным множеством
$$\{((1\ 2), \varepsilon), ((1\ 2\ 3), \varepsilon)\}.$$

Равенство, позволяющее выразить элемент $\mathbf{e}$ с помощью 7-арной операции $[\ ]_{7, (12), 2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M_1)$ имеет вид

$$[((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)$$
$$((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)]_{7, (12), 2} =$$
$$= ((1\ 2)^4, (1\ 2\ 3)^3) = (\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{e}.$$

Это равенство получается из равенства, завершающего доказательство теоремы 6.1, из которой извлечена теорема 6.3.

Для нахождения полиадических групп вида $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, порождаемых множеством $\mathbf{U}_j(M)$, можно воспользоваться непосредственно теоремой 6.1.

***Следствие* 7.7.** *Для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, где $n \geq 4$ – нечётное, $l = (2n-1)k + 1$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, порождается множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (3\ 4\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ 3), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

Доказательство. Известно, что для нечётного $n \geq 4$ знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$ порождается [5] множеством
$$\{u = (3\ 4\ \ldots\ n), v = (1\ 2\ 3)\},$$
при этом
$$u^{n-2} = v^3 = (uv)^n = \varepsilon. \quad (7.1)$$

Положив в теореме 6.1 $r = 2n - 1$,
$$u_1 = u, u_2 = v, u_3 = u, u_4 = v, \ldots, = u_{2n-1} = u, u_{2n} = v,$$
$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{2n-4} = u, v_{2n-3} = v_{2n-2} = v_{2n-1} = v,$$
и, учитывая (7.1), получим

$$u_1u_2 \ldots u_{2n} = (uv)^n = \varepsilon,$$
$$v_1v_2 \ldots, v_{2n-1} = u^{2n-4}v^3 = (u^{n-2})^2\varepsilon = \varepsilon.$$

По теореме 6.1 для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = (2n-1)k+1$, порождается множеством, указанном в условии. Следствие доказано.

***Следствие* 7.8.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $n \geq 4$ – *чётное,* $l = (2n-2)k+1$, σ – *цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, *порождается множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2)(3\ 4 \ldots n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ 3), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

Доказательство. Известно, что для чётного $n \geq 4$ знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$ порождается [5] множеством $\{w = (1\ 2)(3\ 4 \ldots n), v = (1\ 2\ 3)\}$, при этом

$$w^{n-2} = v^3 = (wv)^{n-1} = \varepsilon. \tag{7.2}$$

Положив в теореме 6.1 $r = 2n-2$,

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{2n-4} = w,\ u_{2n-3} = u_{2n-2} = u_{2n-1} = v,$$
$$v_1 = w,\ v_2 = v,\ v_3 = w,\ v_4 = v,\ \ldots, = v_{2n-3} = w,$$
$$v_{2n-2} = v,$$

и, учитывая (7.2), получим

$$u_1u_2 \ldots u_{2n-1} = w^{2n-4}v^3 = (w^{n-2})^2\varepsilon = \varepsilon,$$
$$v_1v_2 \ldots v_{2n-2} = (wv)^{n-1} = \varepsilon.$$

По теореме 6.1 для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = (2n-2)k+1$, порождается множеством, указанном в условии. □

8 Обобщения теорем 6.3 и 6.4

Отметим, что теорему 6.3 можно сформулировать в более общем виде, показав, что в её условиях существует не одна, а бесконечно много полиадических групп $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ различных арностей l, которые порождаются множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Указанная в формулировке теоремы 6.3 $(rk+1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{rk+1,\sigma,k} >$– лишь одна из них.

***Теорема* 8.1**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^{r+1} = b^r = 1$ *для некоторого* $r \geq 2$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i+1)k+1, \text{ если } 1+ri > 0, \\ -(r+1)(1+ri)k+1, \text{ если } 1+ri < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

При $r \geq 2$ множество всех целых решений неравенства $1+ri > 0$ имеет вид $\{0, 1, 2, \ldots,\}$, соответственно множество всех целых решений неравенства $1+ri < 0$ имеет вид $\{-1, -2, \ldots\}$. Поэтому теорему 8.1 можно переформулировать следующим образом.

***Теорема* 8.2**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^{r+1} = b^r = 1$ *для некоторого* $r \geq 2$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i+1)k+1,\ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(r+1)(1+ri)k+1,\ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 8.1**. Теоремы 8.1 и 8.2 включает в себя теорему 6.3 при $i = 0$, то есть теоремы 8.1 и 8.2 можно рассматривать как обобщения теоремы 6.3.

Мы получим теоремы 8.1 и 8.2 как следствие более общего результата.

Из теории чисел известно [6], что для взаимно простых целых чисел m и n уравнение

$$mx + ny = 1 \tag{8.1}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. Если (x_0, y_0) – одно из таких решений, то множество всех решений диофантового уравнения (8.1) имеет вид

$$\{(x_0 - ni, y_0 + mi) \mid i \in \mathbf{Z}\}$$

или, что равносильно,

$$\{(x_0 + ni, y_0 - mi) \mid i \in \mathbf{Z}\}. \tag{8.2}$$

Ясно, что ненулевые компоненты любого решения (x_0, y_0) уравнения (8.1) имеют разные знаки: $xy < 0$.

***Теорема* 8.3**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^m = b^n = 1$ *для некоторых взаимно простых* $m \geq 2$ *и* $n \geq 2$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – *какое-либо решение диофантового уравнения* (8.1). *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} n(mi - y_0)k+1, \text{ если } x_0 + ni > 0, \\ -m(x_0+ni)k+1, \text{ если } x_0 + ni < 0, \end{cases} \tag{8.3}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Подставим любое решение из (8.2), которое имеет ненулевые компоненты, в (8.1):

$$m(x_0 + ni) + n(y_0 - mi) = 1. \tag{8.4}$$

Если $x_0 + ni = 0$ или $y_0 - mi = 0$, то соответственно $n = \pm 1$ или $m = \pm 1$, что противоречит неравенствам $m \geq 2$ и $n \geq 2$ из условия теоремы. Потому считаем

$$x_0 + ni \neq 0,\ y_0 - mi \neq 0. \tag{8.5}$$

Если $x_0 + ni > 0$, то из (8.4) и (8.5) следует

$$n(y_0 - mi) < 0,$$

откуда получаем $y_0 - mi < 0$. Так как в левой части этого неравенства стоит целое число, то на самом деле $y_0 - mi \leq -1$ или, что равносильно, $mi - y_0 \geq 1$. Из последнего неравенства и неравенства $n \geq 2$ следует $n(mi - y_0) \geq 2$. Положив

$$r = -n(y_0 - mi) = n(mi - y_0),$$

где $r \geq 2$, и, учитывая (8.4), получим

$$r + 1 = m(x_0 + ni).$$

Так как

$$a^{r+1} = a^{m(x_0+ni)} = (a^m)^{x_0+ni} = 1,$$

$$b^r = b^{n(mi-y_0)} = (b^n)^{mi-y_0} = 1,$$

то по теореме 6.3 ($u = a$, $v = b$), l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = n(mi - y_0)k + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Рассмотрим теперь неравенство $x_0 + ni < 0$, в левой части которого стоит целое число. Поэтому на самом деле $x_0 + ni \leq -1$, откуда ввиду $m \geq 2$, следует $m(x_0 + ni) \leq -2$ или, что равносильно, $-m(x_0 + ni) \geq 2$. Положив

$$r = -m(x_0 + ni),$$

где $r \geq 2$, и, учитывая (8.4), получим

$$r + 1 = n(y_0 - mi).$$

Так как

$$b^{r+1} = b^{n(y_0-mi)} = (b^n)^{y_0-mi} = 1,$$

$$a^r = a^{-m(x_0+ni)} = (a^m)^{-(x_0+ni)} = 1,$$

то по теореме 6.3 ($u = b$, $v = a$), l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где

$$l = -m(x_0 + ni)k + 1,$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. □

***Замечание* 8.2**. В теореме 8.3 формулу (8.3) можно заменить формулой

$$l = \begin{cases} n(mi - y_0)k + 1, \text{если } y_0 - mi < 0, \\ -m(x_0 + ni)k + 1, \text{если } y_0 - mi > 0. \end{cases}$$

Так как числа r и $r + 1$ взаимно простые, то следующая теорема является следствием теоремы 8.3.

***Теорема* 8.4**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что $a^{r+1} = b^r = 1$ для некоторого $r \geq 2$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – какое-либо решение диофантового уравнения*

$$(r + 1)x + ry = 1. \tag{8.6}$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где

$$l = \begin{cases} r((r+1)i - y_0)k + 1, \text{если } x_0 + ri > 0, \\ -(r+1)(x_0 + ri)k + 1, \text{если } x_0 + ri < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как пара $(1, -1)$ является одним из решений диофантового уравнения (8.6), то теоремы 8.1 и 8.2 совпадают с теоремой 8.3 при $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

***Замечание* 8.3**. Теоремы 8.1–8.4, обобщающие теорему 6.3, является формальными её обобщениями, так как при доказательстве теоремы 8.3, а значит и вытекающих из неё теорем 8.1, 8.2 и 8.4, была использована теорема 6.3.

Результаты, аналогичные теоремам 8.1–8.4, справедливы и для l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Доказательство следующего аналога теоремы 8.3 отличается от её доказательства только ссылкой на теорему 6.4 вместо ссылки на теорему 6.3.

***Теорема* 8.5**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, в котором имеются элементы a и b такие, что $a^m = b^n = 1$ для некоторых взаимно простых $m \geq 2$ и $n \geq 2$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – какое-либо решение диофантового уравнения* (8.1). *Тогда l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где*

$$l = \begin{cases} n(mi - y_0)k + 1, \text{если } x_0 + ni > 0, \\ -m(x_0 + ni)k + 1, \text{если } x_0 + ni < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Из теоремы 8.5 вытекают результаты, аналогичные теоремам 8.1, 8.2 и 8.4. Ограничимся аналогом теоремы 8.2.

***Теорема* 8.6**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, в котором имеются элементы a и b такие, что $a^{r+1} = b^r = 1$ для некоторого $r \geq 2$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i + 1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(r+1)(1 + ri)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 8.4**. Заменив в теоремах 8.1, 8.2, 8.4 и 8.6 равенства $a^{r+1} = b^r = 1$ равенствами $a^d = b^c = 1$, где d делит $r + 1$, c делит r, получим формальные обобщения этих теорем.

Приведём несколько следствий из теорем этого раздела.

Так как специальная линейная группа $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ порождается [5] матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

то из теоремы 8.2 вытекает

***Следствие* 8.1.** *Для любого цикла σ длины k из $\mathbf{S}_k$ l-арная группа $< \mathbf{SL}_2^k(\mathbf{Z}), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где*

$$l = \begin{cases} 3(4i + 1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -4(3i + 1)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается двухэлементным множеством

$$\left\{ \left(\underbrace{E, \ldots, E}_{j-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{E, \ldots, E}_{k-j} \right), \left(\underbrace{E, \ldots, E}_{j-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \underbrace{E, \ldots, E}_{k-j} \right) \right\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Известно, что простая группа Матье $\mathbf{M}_{11}$, рассматриваемая как группа подстановок, порождается [7] двумя подстановками

$$(1\ 2\ \ldots\ 11), (5\ 6\ 4\ 10)(11\ 8\ 3\ 7),$$

порядка 11 и 4 соответственно. Так как пара (3, – 1) является одним из решений диофантового уравнения $4x + 11y = 1$, то из теоремы 8.3 вытекает

***Следствие* 8.2.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *l-арная группа* $< \mathbf{M}_{11}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} 11(4i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -4(11i+3)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается двухэлементным множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ 11), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (5\ 6\ 4\ 10)(11\ 8\ 3\ 7), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

9 Случай инволюций

В ряде случаев порождающее множество группы содержит инволюции и элементы, нечётная степень которых совпадает с единицей группы. К таким группам применима теорема 8.3. при $m = 2$ и $n = 2t + 1$, где $t \geq 1$ или $n = 2t - 1$, где $t \geq 2$. Сформулируем соответствующий результат для случая $m = 2$, $n = 2t + 1$, где $t \geq 1$.

***Теорема* 9.1**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^{2t+1} = 1$ *для некоторого* $t \geq 1$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – *какое-либо решение диофантового уравнения*

$$2x + (2t + 1)y = 1. \qquad (9.1)$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2t+1)(2i-y_0)k+1, \text{ если } x_0 + (2t+1)i > 0, \\ -2(x_0 + (2t+1)i)k+1, \text{ если } x_0 + (2t+1)i < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как пара $(t + 1, - 1)$ является одним из решений диофантового уравнения (9.1), то неравенство $x_0 + (2t + 1)i > 0$ принимает вид

$$x_0 + (2t + 1)i = t + 1 + (2t + 1)i > 0.$$

Из этого неравенства следует $i > -\dfrac{t+1}{2t+1}$, откуда $i = 0, 1, 2, \ldots$. Соответственно из неравенства $x_0 + (2t + 1)i < 0$ следует $i < -\dfrac{t+1}{2t+1}$, откуда $i = - 1, - 2, \ldots$. Поэтому из теоремы 9.1 вытекает

***Теорема* 9.2**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^{2t+1} = 1$ *для некоторого* $t \geq 1$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2t+1)(2i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(t+1+(2t+1)i)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \qquad (9.2)$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Диэдральная группа $\mathbf{D}_{2n}$ порядка $2n$, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n-многоугольника порождается двухэлементным множеством $M = \{a, b\}$, где a – любое отражение, b – порождающий элемент циклической подгруппы $\mathbf{Z}_n$ поворотов. Так как $a^2 = b^n = 1$, то, положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{D}_{2(2t+1)}$, где $t \geq 1$, получим

***Следствие* 9.1.** *Для любого цикла* σ *длины k из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $t \geq 1$ *l-арная группа* $< \mathbf{D}_{2(2t+1)}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где арность l определяется равенством* (9.2), *порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, a, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, b, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{S}_{2t+1}$, $a = (12)$, $b = (12\ \ldots\ 2t + 1)$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = - 1$ следствие 7.5.

***Следствие* 9.2.** *Для любого цикла* σ *длины k из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $t \geq 1$ *l-арная группа* $< \mathbf{S}_{2t+1}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где арность l определяется равенством* (9.2), *порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ 2t+1), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий результат получается из теоремы 8.3 при $m = 2$, $n = 2s - 1$, где $s \geq 2$.

***Теорема* 9.3**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^{2s-1} = 1$ *для некоторого* $s \geq 2$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – *какое-либо решение диофантового уравнения*

$$2x + (2s - 1)y = 1. \qquad (9.3)$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2s-1)(2i-y_0)k+1, \text{ если } x_0 + (2s-1)i > 0, \\ -2(x_0 + (2s-1)i)k+1, \text{ если } x_0 + (2s-1)i < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как пара $(s, - 1)$ является одним из решений диофантового уравнения (9.3), то неравенство $x_0 + (2s - 1)i > 0$ принимает вид

$$x_0 + (2s - 1)i = s + (2s - 1)i > 0.$$

Из этого неравенства следует $i > -\dfrac{s}{2s-1}$, откуда $i = 0, 1, 2, \ldots$. Соответственно из неравенства $x_0 + (2s - 1)i < 0$ следует $i < -\dfrac{s}{2s-1}$, откуда $i = - 1, - 2, \ldots$. Поэтому из теоремы 9.3 вытекает

***Теорема* 9.4**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^{2s-1} = 1$ *для некоторого* $s \geq 2$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l=\begin{cases}(2s-1)(2i+1)k+1, & i=0,1,2,\ldots,\\ -2(s+(2s-1)i)k+1, & i=-1,-2,\ldots,\end{cases} \quad (9.4)$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.4 $A = \mathbf{S}_{2s-1}$, $a = (12)$, $b = (12 \ldots 2s-1)$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = 0$ следствие 7.6.

***Следствие* 9.3.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $s \geq 2$ *l-арная группа* $<\mathbf{S}^k_{2s-1}, [\,]_{l,\sigma,k}>$, *где арность* l *определяется равенством* (9.4), *порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{j-1}, (1\,2), \underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{j-1}, (1\,2\,\ldots\,2s-1), \underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{S}_{2(t+1)}$, $a = (1\;2)$, $b = (2\;3\;\ldots\;2(t+1))$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = 0$ следствие 7.4.

***Следствие* 9.4.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $t \geq 1$ *l-арная группа* $<\mathbf{S}^k_{2(t+1)}, [\,]_{l,\sigma,k}>$, *где*

$$l=\begin{cases}(2t+1)(2i+1)k+1, & i=0,1,2,\ldots,\\ -2(t+1+(2t+1)i)k+1, & i=-1,-2,\ldots,\end{cases}$$

порождается множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{j-1}, (1\,2), \underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{j-1}, (2\,3\,\ldots\,2(t+1)), \underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.4 $A = \mathbf{S}_{2s}$, $a = (1\;2)$, $b = (2\;3\;\ldots\;2s)$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = 0$ следствие 7.4.

***Следствие* 9.5.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $s \geq 2$ *l-арная группа* $<\mathbf{S}^k_{2s}, [\,]_{l,\sigma,k}>$, *где*

$$l=\begin{cases}(2s-1)(2i+1)k+1, & i=0,1,2,\ldots,\\ -2(s+(2s-1)i)k+1, & i=-1,-2,\ldots,\end{cases}$$

порождается множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{j-1}, (1\,2), \underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{j-1}, (2\,3\,\ldots\,2s), \underbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 9.1**. Теоремы 9.1 и 9.3 равносильны, так как вторая получается из первой заменой $t = s - 1$, а первая из второй – заменой $s = t + 1$. По этой же причине равносильны теоремы 9.2 и 9.4, следствия 9.2 и 9.3, а также следствия 9.4 и 9.5.

Каждый результат разделов 8 и 9 характеризуется тем, что фигурирующей в нём группе A, порождаемой множеством M, соответствует бесконечно много полиадических групп $<A^k, [\,]_{l,\sigma,k}>$ различных арностей l, порождаемых множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. При фиксированном k эти арности зависят только от m и n. Изменение m и n приводит к иной серии полиадических групп $<A^k, [\,]_{l,\sigma,k}>$ различных арностей l, порождаемых множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Проиллюстрируем сказанное примером.

***Пример* 9.1**. Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_5$ порождается [5] тремя подстановками,

(5 4 3 2 1), (1 2 3 4), (1 2)(3 4 5)

имеющими порядки 5, 4 и 6 соответственно, то согласно теореме 8.2 ($r = 4$), l-арная группа $<\mathbf{S}^2_5, [\,]_{l,(12),2}>$, где

$$l=\begin{cases}40i+9, & i=0,1,2,\ldots,\\ -40i-9, & i=-1,-2,\ldots,\end{cases}$$

порождается любым из двух следующих трёхэлементных множеств

$$\{((5\,4\,3\,2\,1), \varepsilon), ((1\,2\,3\,4), \varepsilon), ((1\,2)(3\,4\,5), \varepsilon)\},$$
$$\{(\varepsilon, (5\,4\,3\,2\,1)), (\varepsilon, (1\,2\,3\,4)), (\varepsilon, (1\,2)(3\,4\,5))\}. \quad (9.5)$$

Множество всех указанных выше арностей l имеет вид

$$\{9, 49, 89, 129, \ldots\} \cup \{31, 71, 111, 151\ldots\}. \quad (9.6)$$

Так как $((1\;2)(3\;4\;5))^6 = (5\;4\;3\;2\;1))^5 = \varepsilon$, то согласно теореме 8.2 ($r = 5$), l-арная группа $<\mathbf{S}^2_5, [\,]_{l,(12),2}>$, где

$$l=\begin{cases}60s+11, & s=0,1,2,\ldots,\\ -60s-11, & s=-1,-2,\ldots,\end{cases}$$

порождается любым из трёхэлементных множеств из (9.5). Множество всех указанных выше арностей l имеет вид

$$\{11, 71, 131, \ldots\} \cup \{49, 109, 169, \ldots\}. \quad (9.7)$$

и отличается от (9.6). При этом множества (9.6) и (9.7) имеют непустое пересечение.

Так как равносильные равенства

$$40i + 9 = 60s + 11, \; -40i - 9 = -60s - 11$$

при целых i и s, имеющих одинаковые знаки, невозможны, то для нахождения общих элементов множеств (9.6) и (9.7) достаточно найти i и s, удовлетворяющие равносильным равенствам

$$40i + 9 = -60s - 11, \; -40i - 9 = 60s + 11,$$

то есть решить диофантово уравнение

$$2i + 3s = -1.$$

относительно i и s. Так как пара $(1, -1)$ – частное решение этого уравнения, то

$$(i = 3\nu + 1, \; s = -2\nu - 1)$$

– его общее решение. Таким образом, общие элементы множеств (9.6) и (9.7) находятся по формуле

$$l=\begin{cases}120\nu+49, & \nu=0,1,2,\ldots,\\ -120\nu-49, & \nu=-1,-2,\ldots.\end{cases}$$

Согласно следствию 9.2, при $k = 2$, $t = 2$, $\sigma = (12)$ l-арная группа $<\mathbf{S}^2_5, [\,]_{l,(12),2}>$, где

$$l=\begin{cases}20t+11, & t=0,1,2,\ldots,\\ -20t-11, & t=-1,-2,\ldots,\end{cases}$$

порождается любым из двухэлементных множеств

$$\{((1\ 2), \varepsilon), ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), \varepsilon)\},$$
$$\{(\varepsilon, (1\ 2)), (\varepsilon, (1\ 2\ 3\ 4\ 5))\}.$$

Множество всех указанных выше арностей l имеет вид

$$\{11, 31, 51, 71, \ldots\} \cup \{9, 29, 49, 69, \ldots\}. \quad (9.8)$$

Можно заметить, что все арности из (9.6) и (9.7) содержатся в (9.8), но в (9.8) имеются арности, не входящие ни в (9.6), ни в (9.7). Это объясняется тем, что, с одной стороны,

$$20i + 11 = -40t - 9,\ -20i - 11 = 40t + 9$$

при $i = -2t - 1$, а с другой стороны,

$$20i + 11 = 60s + 11,\ -20i - 11 = -60s - 11$$

при $i = 3s$.

Подчеркнём, что полиадические группы $< \mathbf{S}_5^2, [\ ]_{l,(12),2} >$ арностей (9.8) порождаются двухэлементными множествами, а полиадические группы $< \mathbf{S}_5^2, [\ ]_{l,(12),2} >$ арностей (9.6) и (9.7) порождаются трёхэлементными множествами.

Теорема 8.3 применима в тех случаях, когда группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что $u^m = v^n = 1$ для некоторых взаимно простых $m \geq 2$ и $n \geq 2$. Если множество M содержит более двух элементов, то теорему 8.3 можно применять несколько раз, что увеличивает выбор арностей l, определяемых формулой (8.3). В этом смысле наибольший интерес представляют группы, у которых все элементы порождающего множества имеют разные порядки, любые два из которых являются взаимно простыми.

Так как простая группа Матье $\mathbf{M}_{24}$, рассматриваемая как группа подстановок, порождается [7] тремя подстановками

$$\alpha = (1\ 2\ 3, \ldots\ 23),$$
$$\beta = (3\ 17\ 10\ 7\ 9)(5\ 4\ 13\ 14\ 19) \times$$
$$\times\ (11\ 12\ 23\ 8\ 18)(21\ 16\ 15\ 20\ 22),$$
$$\gamma = (1\ 24)(2\ 23)(3\ 12)(4\ 16)(5\ 18)(6\ 10) \times$$
$$\times\ (7\ 20)(8\ 14)(9\ 21)(11\ 17)(13\ 22)(19\ 15)$$

порядков 23, 5 и 2 соответственно, то к ней теорема 8.3 может быть применима трижды.

***Следствие* 9.6.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *l-арная группа* $< \mathbf{M}_{24}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* l *принимает любое из перечисленных ниже значений*

$$l = \begin{cases} 23(2i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(12+23i)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.9)$$

$$l = \begin{cases} 5(2s+1)k+1, & s = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(3+5s)k+1, & s = -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.10)$$

$$l = \begin{cases} 23(5t-2)k+1, & t = 1, 2, \ldots, \\ -5(23t-9)k+1, & t = 0, -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.11)$$

порождается трёхэлементным множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \beta, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \gamma, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\gamma\}.$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Положив в теореме 9.2, являющейся следствием из теоремы 8.3, $A = \mathbf{M}_{24}$, $a = \gamma$, $b = \alpha$, получим (9.9).

Положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{M}_{24}$, $a = \gamma$, $b = \beta$, получим (9.10).

Положив в теореме 8.3 $A = \mathbf{M}_{24}$, $a = \beta$, $b = \alpha$, $m = 5$, $n = 23$, и, учитывая, что пара $(-9, 2)$ является решением диофантового уравнения $5x + 23y = 1$, получим (9.11). Во всех трёх случаях l-арная группа $< \mathbf{M}_{24}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается указанным в условии трёхэлементным множеством. ◻

***Замечание* 9.2**. Значения $t = 1, 2, \ldots$ в (9.11) является следствием неравенства

$$x_0 + nt = -9 + 23t > 0$$

из теоремы 8.3, а значения $t = 0, -1, -2, \ldots$ – следствием неравенства

$$x_0 + nt = -9 + 23t < 0$$

из той же теоремы.

***Замечание* 9.3**. При $k = 2$ формулы (9.9) – (9.11) принимают вид

$$l = \begin{cases} 92i+47, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -92i-47, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} 20s+11, & s = 0, 1, 2, \ldots, \\ -20s-11, & s = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} 230t-91, & t = 1, 2, \ldots, \\ -230t+91, & t = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Для каждой из этих формул укажем некоторые значения l:

$$\{47, 139, 231, \ldots\} \cup \{45, 137, 229, \ldots\}, \quad (9.12)$$
$$\{11, 31, 51, 71, \ldots\} \cup \{9, 29, 49, 69, \ldots\}, \quad (9.13)$$
$$\{139, 369, 599, \ldots\} \cup \{91, 321, 551, \ldots\}. \quad (9.14)$$

Множества (9.12) и (9.13) имеют непустое пересечение, все элементы которого определяются формулой

$$l = \begin{cases} 460\eta-231, & \eta = 1, 2, \ldots, \\ -460\eta+231, & \eta = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Имеются общие элементы и у множеств (9.12) и (9.14), все они задаются формулой

$$l = \begin{cases} 460\mu-139, & \mu = 1, 2, \ldots, \\ -460\mu+139, & \mu = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Аналогично, все общие элементы множеств (9.13) и (9.14) задаются формулой

$$l = \begin{cases} 460\nu-369, & \nu = 1, 2, \ldots, \\ -460\nu+369, & \nu = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Общих арностей, принадлежащих множествам (9.12), (9.13) и (9.14), не существует, то есть пересечение трёх указанных множеств пусто.

Следующие две теоремы соответствуют теореме 9.1 для простого числа $p = 2t + 1$ и теореме 9.2 для $x_0 = \dfrac{p+1}{2}$, $y_0 = -1$.

***Теорема* 9.5**. *Пусть группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* *а и b такие, что* $a^2 = b^p = 1$ *для некоторого нечётного простого p*, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – *какое-либо решение диофантового уравнения*

$$2x + py = 1.$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} p(2i - y_0)k + 1, \text{ если } x_0 + pi > 0, \\ -2(x_0 + pi)k + 1, \text{ если } x_0 + pi < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Теорема* 9.6**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^p = 1$ *для некоторого нечётного простого p*, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} p(2i+1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(p + 1 + 2pi)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Сформулируем следствие из теоремы 9.6 для $p = 3$.

***Следствие* 9.7.** *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^3 = 1$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} 3(2i+1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(4 + 6i)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Полагая в следствии 9.7 $k = 2$, получим

***Следствие* 9.8.** *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^2 = b^3 = 1$. *Тогда l-арная группа* $< A^2, [\ ]_{l, (12), 2} >$, *где*

$$l = \begin{cases} 12i + 7, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -12i - 7, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О порождающих множествах l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 69–76.
2. *Гальмак*, *А.М.* Порождающие множества l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2021. – № 1 (57). – С. 35–52.
3. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. *Коксетер*, *Г.С.М.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
6. *Бухштаб*, *А.А.* Теория чисел / А.А. Бухштаб. – Москва: Просвещение, 1966. – 384 с.
7. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – Москва: Мир, 1985. – 352 с.

Поступила в редакцию 24.06.2021.