Проблемы физики, математики и техники, № 4 (13), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП 3'-ИНДЕКСОВ

В.Н. Тютянов

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

PRODUCT OF TWO SOLVABLE SUBGROUPS OF 3' INDEX

V.N. Tyutyanov

Gomel Branch of International University, Gomel

При изучении конечных групп важную роль играют те или иные ограничения на индексы подгрупп. Данная тематика рассматривалась в работах Р. Гуральника, Л.С. Казарина, В.С. Монахова и ряда других авторов. Ограничения на индексы подгрупп рассматривались рядом авторов при рассмотрении факторизационных вопросов. Так, Л.С. Казарин установил разрешимость конечной группы, представимой в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп нечетных индексов. В.С. Монаховым исследовалось строение конечной группы, факторизуемой сомножителями примарных индексов, а также строение конечной группы, факторизуемой разрешимыми сомножителями нечетных индексов с рядом дополнительных ограничений, без использования теоремы о классификации простых неабелевых групп.

Ключевые слова: *конечная группа, простая неабелева группа, группа Фробениуса, факторизуемая группа.*

The restrictions on the indices of subgroups play an important role in the study of finite groups. This theme was considered by R. Guralnik, L.S. Kazarin, V.S. Monahov and other authors. Some authors investigated restrictions on the indices in the consideration of the factorization. L.S. Kazarin proved the solubility of a finite group which is the product of two soluble subgroups of odd index. V.S. Monahov studied the structure of a finite group which is factorized by the factors of prime index. He also studied the structure of a finite group which is factorized by soluble factors of odd index with a number of additional restrictions and without using the theorem on the classification of simple non-Abelian groups.

Keywords: *finite group, simple nonabelian group, Frobenius group, factorized group.*

Введение и терминология

В работе [1] Л.С. Казарин описал композиционные факторы конечной группы, представимой в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп. Позже [2] им была установлена разрешимость конечной группы, факторизуемой двумя разрешимыми подгруппами нечетных индексов. Естественной является задача описания строения конечной группы, представимой в виде произведения разрешимых подгрупп, индексы которых являются r'-числами для некоторого простого делителя r порядка группы G. Поскольку число 3 делит порядок любой простой неабелевой группы за исключением групп Судзуки, то естественно рассмотреть случай $r = 3$.

В работе рассматриваются только конечные группы. Для удобства читателя приведем основные обозначения и определения. Остальные обозначения можно найти в [3], [4].

$|G|$ – порядок конечной группы G; $S(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G; A^l – прямое произведение l групп, изоморфных группе A; S_n – симметрическая группа степени n; p'-группа – это группа, порядок которой не делится на простое число p; A_n – знакопеременная группа степени n; (m, n) – наибольший общий делитель натуральных чисел m и n.

1 Используемые результаты

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

***Лемма* 1.1.** [1]. *Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G. Тогда неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку: $PSL_2(q)$, $q > 3$; $PSL_3(q)$, $q < 9$; $PSL_4(2)$, M_{11}, $PSp_4(3)$, $PSU_3(8)$.*

***Лемма* 1.2.** [1, лемма 2.3, лемма 2.5]. *Пусть $G = AB = AN = BN$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G, N – минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся неабелевой и единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Пусть $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где $N_1 \cong N_i$ – простая неабелева группа для всех $i \geq 1$. Тогда:*

A и B транзитивно действуют сопряжениями на множестве $\Omega = \{N_1, \ldots, N_k\}$. Кроме того, $N \cap A = \times_{i=1}^{k} (N_i \cap A)$ и $N \cap B = \times_{i=1}^{k} (N_i \cap B)$.

$|N_1|$ делит $|Out(N_1)||N_1 \cap A||N_1 \cap B|$.

***Лемма* 1.3.** [5]. *Пусть конечная группа $G = AB$, причем порядок группы G не делится на 3 и A и B – разрешимые группы. Тогда G является разрешимой группой.*

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G. Если $(|G:A|, 3) = (|G:B|, 3) = 1$, тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Покажем, что $S(G) = 1$. Пусть $S(G) \neq 1$ и $N \cong Z_p^l$ – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Если $p \neq 3$, то фактор-группа $\overline{G} = G/N = (AN/N)(BN/N)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому $\overline{G}$, а значит и G, имеет композиционные факторы, изоморфные $PSL_2(7)$. Следовательно, $p = 3$. Если N – силовская 3-подгруппа в группе G, то $\overline{G}$ – произведение двух разрешимых $3'$-групп. По лемме 1.3, $\overline{G}$ – разрешима, а поэтому G – разрешимая группа. Значит, N не является силовской 3-подгруппой группы G. В этом случае $\overline{G}$ удовлетворяет условиям теоремы и неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$. Таким образом, $S(G) = 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Покажем, что $G = AN = BN$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть $L = AN \neq G$. Тогда $L = A(L \cap B)$ – произведение двух разрешимых групп. Так как $A \leq L$, то $L \cap B$ содержит силовскую 3-подгруппу группы G. Поэтому L удовлетворяет условию теоремы и $N_i \cong PSL_2(7)$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/N = \overline{A}\overline{B}$. Тогда либо $\overline{A}$, $\overline{B}$ – $3'$-группы и $\overline{G}$ разрешима по лемме 1.3, либо $\overline{G}$ удовлетворяет условию теоремы и ее простые неабелевы композиционные факторы изоморфны $PSL_2(7)$. Следовательно, в обоих случаях неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$. Поэтому $G = AN$. Точно так же $G = BN$. Если M – минимальная нормальная подгруппа в G и $M \neq N$, то группа G изоморфно вкладывается в

$$G/M \times G/N = AM/M \times AN/N \cong$$
$$\cong A/A \cap M \times A/A \cap N$$

– разрешимая группа. Поэтому N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и выполняются условия леммы 1.2.

Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Так как $S(G) = 1$, то $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где $k \geq 1$ и N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Из леммы 1.1 следует, что $|N|$ делится на 3. Поскольку $G = AN$ и подгруппа A содержит силовскую 3-подгруппу группы G, то $A \cap N$ содержит силовскую 3-подгруппу группы N. Из равенства $N = N_1 \times \ldots \times N_k$ следует, что $A \cap N_1$ содержит силовскую 3-подгруппу группы N_1 и 3 делит $|A \cap N_1|$. Точно так же, $B \cap N_1$ содержит силовскую 3-подгруппу группы N_1 и 3 делит $|B \cap N_1|$. По лемме 3.2 $|N_1|$ делит $|Out(N_1)||N_1 \cap A||N_1 \cap B|$. Рассмотрим все случаи из леммы 1.1.

(1) $N_1 \cong PSL_2(q)$, $q = p^n > 3$, $|Out(N_1)| = n(2, q-1)$.

Пусть сначала $p = 2$. По теореме Диксона [6, теорема 2.8.27] максимальными разрешимыми подгруппами в N_1, порядок которых делится на 3, могут быть A_4, диэдральные группы порядков $2(q \pm 1)$, группа Фробениуса порядка $q(q-1)$. Пусть $|N_1 \cap A|$ делит $|A_4| = 12$. Тогда силовская 3-подгруппа в N_1 имеет порядок 3. Если $|N_1 \cap B|$ делит $|A_4| = 12$, тогда

$$\frac{n \cdot 12 \cdot 12}{q(q-1)(q+1)} = \frac{144 \cdot n}{2^n(2^n-1)(2^n+1)}$$

будет являться целым числом. В частности, $2^n(2^n-1)(2^n+1) \leq 144n$. Последнее равенство возможно только при $n = 2$ и $n = 3$. В обоих случаях $\frac{144 \cdot n}{2^n(2^n-1)(2^n+1)}$ не является целым числом. Отметим, что $(q+1, q-1) = 1$. Если $q + 1$ делится на 3, то $|N_1 \cap B|$ делит $2(q+1)$. Поэтому $\frac{n \cdot 12 \cdot 2(q+1)}{q(q-1)(q+1)} = \frac{24 \cdot n}{2^n(2^n-1)}$ – целое число. При этом $2^n(2^n-1) \leq 24 \cdot n$. Это возможно при $n = 2$ и $n = 3$. Если $n = 2$, то $q + 1 = 5$ и не делится на 3. Если $n = 3$, то $q + 1 = 9$. Противоречие с тем, что силовская 3-подгруппа в N_1 имеет порядок 3.

Следовательно, $q-1$ делится на 3. Случай, когда $|N_1 \cap B|$ делит $|A_4|$, был рассмотрен. Поэтому можно считать ($q = 2^n$), что $|N_1 \cap B|$ делит $q(q-1)$. Тогда $\frac{n \cdot 12 \cdot q(q-1)}{q(q-1)(q+1)} = \frac{12 \cdot n}{2^n+1}$ – целое число. Если $n > 6$, то $\frac{2 \cdot n}{2^n+1} < 1$, что невозможно. При $n \in \{2, 4, 5, 6\}$ дробь не целое число. При $n = 3$ получим, что $q-1 = 7$ и не делится на 3. Таким образом, подгруппу A_4 можно исключить из списка и считать, что $|N_1 \cap A|$ делит $q(q-1)$. В этом случае $(q+1, 3) = 1$ и $|N_1 \cap B|$ делит $2(q-1)$ или $q(q-1)$. Пусть сначала $|N_1 \cap B|$ делит $2(q-1)$. Тогда $\frac{n \cdot q(q-1) \cdot 2 \cdot (q-1)}{q(q-1)(q+1)} = \frac{2 \cdot n \cdot (2^n-1)}{2^n+1}$ – целое число. Так как $(2, 2^n+1) = (2^n-1, 2^n+1) = 1$, то $\frac{n}{2^n+1}$ – целое число, что невозможно. Второй случай рассматривается совершенно аналогично.

Пусть $p > 2$. По теореме Диксона [6, теорема 2.8.27] максимальными разрешимыми подгруппами в N_1, порядок которых делится на 3, могут быть A_4, S_4, диэдральные подгруппы порядков $q \pm 1$, подгруппа Фробениуса порядка $q(q-1)/2$.

Если $p = 3$, то $n \geq 2$ и силовская 3-подгруппа в N_1 имеет порядок больший 3. Так как 9 не делит $|A_4|$, $|S_4|$ и $(q\pm 1,3)=1$, то $|N_1\cap A|$ и $|N_1\cap B|$ делят $3^n(3^n-1)/2$. Отсюда получаем, что

$$\frac{2n\frac{1}{2}3^n(3^n-1)\frac{1}{2}3^n(3^n-1)}{\frac{1}{2}3^n(3^n-1)(3^n+1)}=\frac{n3^n(3^n-1)}{3^n+1}$$

– целое число. Так как $(3^n, 3^n+1) = 1$, то $\frac{n(3^n-1)}{3^n+1}$ – целое число. Из $(3^n-1, 3^n+1) = 2$ следует, что n делится на $(3^n+1)/2$, а поэтому $2n\ge 3^n+1$, что невозможно.

Таким образом, $p\ge 5$. Пусть $|N_1\cap A|$ делит $|S_4| = 24$. Если $q+1$ делится на 3, то $|N_1\cap B|$ делит либо $|A_4| = 12$, либо $q+1$. Пусть сначала $|N_1\cap B|$ делит $|S_4|$. Тогда

$$\frac{2n\cdot 24\cdot 24}{\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)}=\frac{2^7\cdot 3^2\cdot n}{p^n(p^n-1)(p^n+1)}$$

– целое число и $p^n(p^n-1)(p^n+1)\le 2^7\cdot 3^2\cdot n.$ Так как $p\ge 5$, то данное неравенство выполняется при $n = 1, 2, 3$. При этом очевидно, что дробь не является целым числом, так как числитель имеет вид: $2^\alpha 3^\beta$. Случай, когда $|N_1\cap B|$ делит $|A_4|$, аналогичен. Пусть $|N_1\cap B|$ делит $q+1$. Тогда $\frac{2n\cdot 24\cdot(q+1)}{\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)}=\frac{96n}{p^n(p^n-1)}$ – целое число и $p^n(p^n-1)\le 96n.$ Это выполняется при $n = 1$ для $p=5$ и $p=7$. В обоих случаях выражение $\frac{96n}{p^n(p^n-1)}$ не является целым числом.

Пусть $q-1$ делится на 3. Тогда можно считать, что $|N_1\cap B|$ делит $q(q-1)/2$ (случаи, когда $|N_1\cap B|$ делит $|A_4|$ и $|S_4|$, были рассмотрены). Тогда $\frac{2n\cdot 24\cdot\frac{1}{2}q(q-1)}{\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)}=\frac{48n}{p^n+1}$ – целое число. В частности, $p^n+1\le 48n.$ Это возможно при $n=1$ и $p\in\{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Из того, что $p-1$ делится на 3 и $\frac{48}{p+1}$ – целое число, заключаем, $p = 7$ и $N_1\cong PSL_2(7)$. Данная группа указана в заключении теоремы. Если $n=2$, то $p=5$ или $p=7$. В этом случае $\frac{96}{p^2+1}$ не является целым числом. При $n\ge 3$ $p^n+1>48n$ и $\frac{48n}{p^n+1}$ не целое число.

Пусть $q+1$ делится на 3. Тогда $|N_1\cap B|$ делит $q+1$ и $\frac{2n\cdot 24\cdot(q+1)}{\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)}=\frac{96n}{p^n(p^n-1)}$ – целое число. В частности, $p^n(p^n-1)\le 96n.$ Это возможно при $n = 1$ и $p = 5$, $p = 7$. В обоих случаях дробь $\frac{96n}{p^n(p^n-1)}$ не целое число. Следовательно, группу S_4 можно исключить из списка. Точно так же исключается группа A_4.

Таким образом, можно считать, что $|N_1\cap A|$ делит $q(q-1)/2$. Так как $(q+1, 3) = 1$, то $|N_1\cap B|$ делит $q-1$ или $q(q-1)$. В первом случае $\frac{2n\cdot\frac{1}{2}q(q-1)(q-1)}{\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)}=\frac{2n(p^n-1)}{p^n+1}$ – целое число. Так как $(p^n-1, p^n+1) = 2$, то $2n$ делится на $(p^n+1)/2$ и $p^n+1\le 4n$, что невозможно. Во втором случае $\frac{2n\cdot\frac{1}{2}q(q-1)\cdot\frac{1}{2}q(q-1)}{\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)}=\frac{np^n(p^n-1)}{p^n+1}$ – целое число. Так как $(p^n-1, p^n+1) = 1$, $(p^n-1, p^n+1) = 2$, то n делится на $(p^n+1)/2$ и $p^n+1\le 2n$, что невозможно.

(2) $N_1\cong PSL_3(2)$. Поскольку $PSL_3(2)\cong PSL_2(7)$, то N_1 содержится в заключении теоремы.

(3) $N_1\cong PSL_3(3)$, $|Out(N_1)|=2$. Из того, что $N_1\cap A$, $N_1\cap B$ содержат силовскую 3-подгруппу группы N_1 из списка максимальных подгрупп в $PSL_3(3)$ [3], следует, что $|N_1\cap A|$ и $|N_1\cap B|$ делят $|3^2:2S_4|=2^4\cdot 3^3$. Тогда по лемме 1.2, $2^4\cdot 3^3\cdot 13$ делит $2\cdot 2^4\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^3$, что невозможно.

(4) $N_1\cong PSL_3(4)$, $|Out(N_1)|=12$. Порядок группы $PSL_3(4)$ равен $2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$. Так как в $PSL_3(4)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2\cdot 7$ [3], то по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(5) $N_1\cong PSL_3(5)$, $|Out(N_1)|=2$. Порядок группы $PSL_3(5)$ равен $2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 31$. Группа $PSL_3(5)$ содержит подгруппу 31:3 [3], и можно считать, что $|N_1\cap A|$ делит $31\cdot 3$. Тогда по лемме 1.2, $|N_1\cap B|$ должен делиться на $5^3\cdot 3$. Максимальная разрешимая подгруппа в $PSL_3(5)$ с таким свойством содержится в $5^2:GL_2(5)$ [3]. Поскольку в группе $GL_2(5)$ не существует разрешимых подгрупп, порядок которых делится на 15, то данный случай невозможен.

(6) $N_1\cong PSL_3(7)$, $|Out(N_1)=6$. Порядок группы $PSL_3(7)$ равен $2^5\cdot 3^2\cdot 7^3\cdot 19$. Так как в $PSL_3(7)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2\cdot 19$ [3], то по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(7) $N_1 \cong PSL_3(8)$, $|Out(N_1)| = 6$. Порядок группы $PSL_3(8)$ равен $2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$. Так как в $PSL_3(8)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2 \cdot 73$ [3], то по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(8) $N_1 \cong PSL_4(2)$, $|Out(N_1)| = 2$. Порядок группы $PSL_4(2)$ равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. В группе $PSL_4(2)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^2 \cdot 7$ [3], и по лемме 1.2 данный случай невозможен.

(9) $N_1 \cong M_{11}$, $|Out(N_1)| = 1$. Порядок группы M_{11} равен $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Так как в M_{11} максимальная разрешимая подгруппа, порядок которой делится на 11, имеет порядок 55, то данный случай невозможен.

(10) $N_1 \cong PSp_4(3)$, $|Out(N_1)| = 2$. Порядок группы $PSp_4(3)$ равен $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Максимальными разрешимыми подгруппами в $PSp_4(3)$, порядок которых делится на 3^4, являются параболические подгруппы $3^3{:}S_4$ и $3_+^{1+2}:2A_4$ [3]. Поэтому $|N_1 \cap A|$ и $|N_1 \cap B|$ не делятся на 5. Противоречие с леммой 1.2.

(11) $N_1 \cong PSU_3(8)$, $|Out(N_1)| = 18$. Порядок группы $PSU_3(8)$ равен $2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$. В группе $PSU_3(8)$ нет подгрупп, порядок которых делится на $3^4 \cdot 19$ [3]. По лемме 3.2 данный случай невозможен.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kazarin, L.S.* Product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. – Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.

2. *Казарин, Л.С.* Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами / Л.С. Казарин // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.

3. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon Press, 1985. – 252 p.

4. *Gorenstein, D.* Finite groups 2nd edn. / D. Gorenstein. – New York : Chelsea, 1980. – 527 p.

5. *Сыскин, С.А.* Об одном вопросе Р. Бэра / С.А. Сыскин // Сиб. матем. журнал. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 679–681.

6. *Huppert, B.* Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967. – 793 s.

Поступила в редакцию 27.03.12.