

УДК 512.53

Группа автоморфизмов свободного произведения π -регулярных полугрупп

А. В. Жучок

Доказано, что группа автоморфизмов свободного произведения произвольных π -регулярных полугрупп изоморфна прямому произведению сплетений групп.

Ключевые слова: π -регулярная полугруппа, свободное произведение, автоморфизм.

It is proved that the group of automorphisms of a free product of any π -regular semigroups is isomorphic to a direct product of wreath products of groups.

Keywords: π -regular semigroup, free product, automorphism.

1 Основные конструкции и обозначения

В этом пункте приведены основные конструкции и обозначения, которые используются в данной работе.

1.1 Пусть $T = \{S_i\}_{i \in Y}$ — семейство полугрупп S_i ($i \in Y$, Y — множество индексов) таких, что $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Определим на множестве Fr' , которое состоит из всех таких конечных непустых последовательностей $a_1 a_2 \dots a_k$, что если $a_j \in S_{i_j}$, $1 \leq j \leq k$, то $i_j \neq i_{j+1}$, $1 \leq j \leq k-1$, операцию следующим образом:

$$a_1 a_2 \dots a_k * b_1 b_2 \dots b_s = \begin{cases} a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_s, & a_k \in S_i, b_1 \in S_j, i \neq j, \\ a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_k \cdot b_1) b_2 \dots b_s, & a_k, b_1 \in S_i, \cdot - \text{операция в } S_i, i \in Y. \end{cases}$$

Короткая непосредственная проверка показывает, что операция $*$ ассоциативная, то есть $(Fr', *)$ — полугруппа. Полученную полугруппу называют свободным произведением полугрупп S_i , $i \in Y$ [1]. Свободное произведение семейства T полугрупп S_i , $i \in Y$ будем обозначать через $Fr[T]$.

Принципиальная важность свободных произведений состоит в том, что любые гомоморфизмы свободных множителей в некоторую фиксированную полугруппу однозначно продолжаются до гомоморфизма свободного произведения в эту полугруппу. Очевидно, что каждый эндоморфизм φ полугруппы $Fr[T]$ однозначно определяется гомоморфизмами $\alpha_i : S_i \rightarrow Fr[T]$ ($i \in Y$). Наоборот, произвольные гомоморфизмы $\alpha_i : S_i \rightarrow Fr[T]$ ($i \in Y$) однозначно продолжаются до эндоморфизма φ полугруппы $Fr[T]$, определенного по правилу:

$$w\varphi = (s_1 s_2 \dots s_m)\varphi = s_1 \alpha_{i_1} s_2 \alpha_{i_2} \dots s_m \alpha_{i_m},$$

где $s_j \in S_{i_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $w = s_1 s_2 \dots s_m \in Fr[T]$.

К полугруппам, которые раскладываются в свободные произведения, принадлежат свободные полугруппы, а именно: свободная полугруппа является свободным произведением бесконечных циклических полугрупп.

1.2 Для произвольной полугруппы T через $Aut T$ будем обозначать группу автоморфизмов полугруппы T . Если $\prod_{i \in Y} G_i$ — декартово произведение групп G_i , $i \in Y$, $a \in \prod_{i \in Y} G_i$, то через $[a]_i$ будем обозначать i -тую компоненту элемента a .

Пусть G — произвольная группа, X — произвольное непустое множество, $\mathfrak{S}[X]$ — симметрическая группа на множестве X . Через $\overline{G} = \prod_{x \in X} G_x$ обозначим декартово произведение изоморфных копий G_x группы G , индексированных элементами множества X , и построим отображение

$$\rho : \mathfrak{S}[X] \rightarrow \text{Aut } \overline{G} : \gamma \mapsto \gamma \rho = \rho_\gamma,$$

где $\rho_\gamma((a_x)) = (a_{\gamma(x)})$ для всех $(a_x) \in \overline{G}$. Непосредственно проверяется, что отображение ρ является гомоморфизмом.

На множестве $\overline{G} \times \mathfrak{S}[X]$, определив операцию по правилу

$$((a_x), \gamma_1)((b_x), \gamma_2) = ((a_x)\rho_{\gamma_1}((b_x)), \gamma_1\gamma_2),$$

получим группу, которую называют сплетением группы G с симметрической группой $\mathfrak{S}[X]$ [2] и обозначают через $G \bar{\wr} \mathfrak{S}[X]$.

1.3 Пусть I — полугруппа идемпотентов. Полугруппу $S = S^0$ называют 0-связкой полугрупп S_i , $i \in I$, если $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, $S_\alpha \cap S_\beta = \{0\}$ при $\alpha \neq \beta$ и для любых $\alpha, \beta \in I$ имеет место условие $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$. Если $S_\alpha \neq \{0\}$ для любого $\alpha \in I$ и $S_\alpha S_\beta = \{0\}$ для любых разных $\alpha, \beta \in I$, то 0-связку называют ортогональной суммой полугрупп S_α , $\alpha \in I$ и обозначают $\bigcup_{\alpha \in I}^0 S_\alpha$.

1.4 Понятие мантии полугруппы впервые было определено Б. В. Новиковым в работе [3]. Напомним его определение.

Пусть S — полугруппа с нулём. Обозначим через \bar{S} множество всех конечных последовательностей (x_1, \dots, x_m) таких, что $x_i \in S \setminus \{0\}$ ($1 \leq i \leq m$) и $x_i x_{i+1} = 0$ ($1 \leq i < m$); таким образом, все одноэлементные последовательности, кроме (0) , содержатся в \bar{S} . Определим на \bar{S} бинарное отношение ρ так, что

$$(x_1, \dots, x_m) \rho (y_1, \dots, y_n)$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $m = n$ и существует такое i ($1 \leq i \leq m - 1$), что $x_i = y_i u$, $y_{i+1} = u x_{i+1}$ для некоторого $u \in S$ и $x_j = y_j$ при $j \neq i, j \neq i + 1$;

2) $m = n + 1$ и существует такое i ($2 \leq i \leq m - 1$), что $x_i = uv$, $y_{i-1} = x_{i-1} u$, $y_i = u x_{i+1}$ для некоторых $u, v \in S$, $x_j = y_j$ при $1 \leq j \leq i - 2$, и $x_j = y_{j-1}$ при $i + 2 \leq j \leq m$.

Пусть $\bar{\rho}$ — минимальная эквивалентность, которая содержит ρ , \tilde{S} — фактор-множество $\bar{S}/\bar{\rho}$. Образ в \tilde{S} последовательности $(x_1, \dots, x_m) \in \bar{S}$ обозначим через $[x_1, \dots, x_m]$.

Введём на \tilde{S} умножение:

$$[x_1, \dots, x_m] [y_1, \dots, y_n] = \begin{cases} [x_1, \dots, x_m y_1, \dots, y_n], & \text{если } x_m y_1 \neq 0, \\ [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n], & \text{если } x_m y_1 = 0. \end{cases}$$

Относительно этой операции \tilde{S} является полугруппой, которую называют мантией полугруппы S .

Мантию легко найти, если исходная полугруппа задана определяющими соотношениями. Будем использовать обозначение

$$S = \langle a_1, \dots, a_m \mid P_i = Q_i, 1 \leq i \leq n \rangle,$$

если полугруппа S порождена элементами a_1, \dots, a_m и определяется равенствами $P_1 = Q_1, \dots, P_n = Q_n$. Если значение слова P_i (или, что то же самое, слова Q_i) в полугруппе S равно 0, то равенство $P_i = Q_i$ называют нулевым.

Предложение [3]. Пусть $S = \langle a_1, \dots, a_m \mid P_i = Q_i, 1 \leq i \leq n \rangle$ — полугруппа с нулём, в которой каждый из порождающих элементов не равен 0. Если отбросить все нулевые определяющие соотношения, то полученная полугруппа будет изоморфна мантии \bar{S} .

2 Ортогональные суммы и свободные произведения. Автоморфизмы свободных произведений

В этом пункте при помощи понятия мантии полугруппы установлена связь между ортогональными суммами и свободными произведениями полугрупп. Описана структура групп автоморфизмов свободных произведений π -регулярных полугрупп.

2.1 Пусть I — полугруппа идемпотентов, S_i^0 ($i \in I$) — произвольные полугруппы с внешне присоединёнными нулями такие, что $S_i^0 \cap S_j^0 = \{0\}$ при $i \neq j$, $S = \bigcup_{i \in I}^0 S_i^0$ — ортогональная сумма полугрупп S_i^0 , $i \in I$ (см. п.1.3). Пусть далее $T = \{S_i\}_{i \in I}$ и $Fr[T]$ — свободное произведение полугрупп S_i , $i \in I$ (см. п.1.1).

Связь между ортогональными суммами полугрупп и свободными произведениями полугрупп устанавливает следующее предложение.

Предложение. $\bar{S} \cong Fr[T]$.

Доказательство непосредственно следует из предложения п.1.4.

2.2 В условиях и обозначениях п. 2.1 имеет место лемма.

Лемма. Каждый автоморфизм ортогональной суммы полугрупп S_i^0 , $i \in I$ продолжается до автоморфизма свободного произведения полугрупп S_i , $i \in I$.

Доказательство. Согласно предложению п.2.1, мантия полугруппы S изоморфна полугруппе $Fr[T]$. Легко проверить, что каждый автоморфизм φ полугруппы S продолжается до автоморфизма φ' полугруппы $Fr[T]$, который определяется по правилу:

$$(s_1 s_2 \dots s_k) \varphi' = s_1 \varphi s_2 \varphi \dots s_k \varphi$$

для всех $s_1 s_2 \dots s_k \in Fr[T]$.

Лемма доказана.

Отметим, что группа автоморфизмов ортогональной суммы ортогонально неразложимых полугрупп была описана в [4].

2.3 Элемент x полугруппы M называется регулярным, если существует $a \in M$ такой, что $xax = x$. Полугруппа M называется π -регулярной [5], если для любого $g \in M$ существует натуральное число k такое, что g^k — регулярный элемент.

К π -регулярным полугруппам относятся, например, эпигруппы [6]. Эпигруппы, в свою очередь, включают инверсные полугруппы, конечные полугруппы, вполне 0-простые полугруппы, полугруппы идемпотентов и т.д.

Пусть $T = \{S_i\}_{i \in I}$ — семейство произвольных π -регулярных полугрупп S_i , $i \in I$. Имеет место лемма.

Лемма. Каждый автоморфизм свободного произведения произвольных π -регулярных полугрупп S_i , $i \in I$ индуцирует автоморфизм ортогональной суммы π -регулярных полугрупп S_i^0 , $i \in I$.

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм полугруппы $Fr [T]$, $s \in S_i$, $i \in I$. Так как $s^m a s^m = s^m$ для некоторых $a \in S_i$, $m \in N$, то, действуя на последнее равенство автоморфизмом φ , получаем:

$$(s^m a s^m)\varphi = s^m \varphi a \varphi s^m \varphi = \underbrace{s\varphi \dots s\varphi}_{m \text{ раз}} a \varphi \underbrace{s\varphi \dots s\varphi}_{m \text{ раз}} = \underbrace{s\varphi \dots s\varphi}_{m \text{ раз}}.$$

Если длина $s\varphi$ больше единицы, то $(s\varphi)^m a \varphi (s\varphi)^m \neq (s\varphi)^m$ при любом $m \in N$. Следовательно, длина $s\varphi$ равна единице, а это означает, что $s\varphi \in S_j$ для некоторого $j \in I$.

Предполагая, что $t\varphi \in S_k$ для некоторого $t \in S_i$, $k \neq j$, получаем, что $(s \cdot t)\varphi = s\varphi t\varphi \in Fr [T] \setminus \bigcup_{i \in I} S_i$, но это противоречит предыдущей выкладке. Следовательно, $S_i\varphi \subseteq S_j$ для некоторого $j \in I$. Если теперь предположить, что $S_j = \bigcup_{i \in \Lambda} S_i\varphi$, где $\Lambda \subseteq I$, то для $y \in S_i\varphi$, $y' \in S_k\varphi$ ($i, k \in \Lambda$, $i \neq k$) получаем $y\varphi^{-1} \in S_i$, $y'\varphi^{-1} \in S_k$, что снова противоречит предыдущим рассуждениям. Следовательно, $S_i\varphi = S_j$ для некоторого $j \in I$. Таким образом, каждый автоморфизм φ полугруппы $Fr [T]$ однозначно определяется некоторыми изоморфизмами $\varphi_i^\tau : S_i \rightarrow S_{i\tau}$, где τ — подходящая биекция множества I .

Обратное утверждение следует из п. 1.1.

Определим далее преобразование φ' ортогональной суммы S π -регулярных полугрупп $S_i^0, i \in I$, полагая

$$s\varphi' = \begin{cases} s\varphi, & \text{если } s \neq 0, \\ 0, & \text{если } s = 0 \end{cases}$$

для всех $s \in S$. Непосредственно проверяется, что φ' — автоморфизм.

Лемма доказана.

2.4 Пусть $T = \{S_i\}_{i \in I}$ — семейство произвольных π -регулярных полугрупп S_i , $i \in I$, $P = \{S_j\}_{j \in I'}$ — множество всех попарно неизоморфных полугрупп семейства T . Для каждого $j \in I'$ через T_j обозначим множество всех полугрупп S_i , $i \in I$, изоморфных полугруппе S_j .

Имеет место лемма.

Лемма. $Aut Fr [T] \cong \prod_{j \in I'} Aut Fr [T_j]$.

Доказательство. Пусть η — автоморфизм полугруппы $Fr [T]$. Поскольку T — семейство π -регулярных полугрупп, то согласно доказательству леммы п.2.3 η однозначно определяется семейством $\{\eta_j\}_{j \in I'}$ автоморфизмов η_j полугрупп $Fr [T_j]$, $j \in I'$.

Для удобства автоморфизм η отождествим с набором $\{\eta_j\}_{j \in I'}$.

Определим отображение

$$\omega : Aut Fr [T] \rightarrow \prod_{j \in I'} Aut Fr [T_j] : \eta = \{\eta_j\}_{j \in I'} \mapsto \eta\omega = \tilde{\eta},$$

полагая $[\tilde{\eta}]_j = \eta_j$ для всех $j \in I'$ (см. п.1.2). По построению ω является биективным.

Кроме этого, $\tilde{\eta}\tilde{\xi} = \tilde{\eta\xi}$ для всех $\eta, \xi \in Aut Fr [T]$, поскольку $[\tilde{\eta\xi}]_j = (\eta\xi)_j = \eta_j\xi_j = = [\tilde{\eta}]_j [\tilde{\xi}]_j$ для всех $j \in I'$.

Таким образом, ω — изоморфизм.

Лемма доказана.

2.5 В обозначениях предыдущего пункта для каждого $j \in I'$ положим $T_j = = \{S_i\}_{i \in A_j}$, где $A_j \subseteq I$.

Следующая теорема описывает строение групп $Aut Fr [T_j]$, $j \in I'$ в терминах сплетений групп, определенных в п.1.2.

Теорема. $Aut Fr [T_j] \cong Aut S_j \bar{\vee} \mathfrak{S}[A_j]$, $j \in I'$.

Доказательство. Поскольку T_j — семейство π -регулярных полугрупп, то каждый автоморфизм ψ полугруппы $Fr[T_j]$ однозначно определяется множеством $\{\psi_i^\delta\}_{i \in A_j}$ изоморфизмов $S_i \rightarrow S_{i\delta}$ ($i \in A_j$), где δ — некоторая биекция множества A_j (см. п.2.3).

Аutomорфизм ψ отождествим с $\{\psi_i^\delta\}_{i \in A_j}$. Далее для всех $i, l \in A_j$ зафиксируем такие изоморфизмы $f^{(i,l)} : S_i \rightarrow S_l$, что $f^{(i,i)}$ — тождественные автоморфизмы, $i \in A_j$, и выполняется условие: $f^{(i,l)} f^{(l,i)} = f^{(i,i)}$. Определим отображение

$$\theta : Aut Fr[T_j] \rightarrow Aut S_j \bar{i} \mathfrak{S}[A_j] : \psi = \{\psi_i^\delta\}_{i \in A_j} \mapsto \psi\theta = (\bar{\psi}, \delta),$$

полагая $[\bar{\psi}]_i = f^{(j,i)} \psi_i^\delta f^{(i\delta,j)}$ для всех $i \in A_j$ (см. п.1.2). Покажем, что θ — гомоморфизм.

Если $\lambda = \{\lambda_i^\sigma\}_{i \in A_j} \in Aut Fr[T_j]$ (λ определяется биекцией σ), то $\lambda\theta = (\bar{\lambda}, \sigma)$, а

$$\psi\lambda = \{\psi_i^\delta\}_{i \in A_j} \{\lambda_i^\sigma\}_{i \in A_j} = \{\mu_i^{\delta\sigma}\}_{i \in A_j} = \mu,$$

где $\mu_i^{\delta\sigma} = \psi_i^\delta \lambda_i^\sigma$ для всех $i \in A_j$. Тогда $\mu\theta = (\bar{\mu}, \delta\sigma)$, причём $[\bar{\mu}]_i = f^{(j,i)} \mu_i^{\delta\sigma} f^{(i\delta\sigma,j)}$, $i \in A_j$.

Далее, перемножая $\psi\theta$ и $\lambda\theta$, получаем:

$$(\psi\theta)(\lambda\theta) = (\bar{\psi}, \delta)(\bar{\lambda}, \sigma) = (\bar{\psi} \rho_\delta(\bar{\lambda}), \delta\sigma),$$

где

$$\begin{aligned} [\rho_\delta(\bar{\lambda})]_i &= [\bar{\lambda}]_{i\delta}, i \in A_j, \\ [\bar{\psi} \rho_\delta(\bar{\lambda})]_i &= [\bar{\psi}]_i [\rho_\delta(\bar{\lambda})]_i = [\bar{\psi}]_i [\bar{\lambda}]_{i\delta} = \\ &= f^{(j,i)} \psi_i^\delta f^{(i\delta,j)} f^{(j,i\delta)} \lambda_{i\delta}^\sigma f^{(i\delta\sigma,j)} = f^{(j,i)} \psi_i^\delta f^{(i\delta,i\delta)} \lambda_{i\delta}^\sigma f^{(i\delta\sigma,j)} = \\ &= f^{(j,i)} \psi_i^\delta \lambda_{i\delta}^\sigma f^{(i\delta\sigma,j)}, i \in A_j. \end{aligned}$$

Сравнивая $[\bar{\psi} \rho_\delta(\bar{\lambda})]_i$ с $[\bar{\mu}]_i$ при всех $i \in A_j$, устанавливаем, что $(\psi\lambda)\theta = (\psi\theta)(\lambda\theta)$, откуда θ — гомоморфизм.

Пусть $\psi \neq \lambda$. Если $\delta \neq \sigma$, то очевидно, что $\psi\theta \neq \lambda\theta$. Предположим, что $\delta = \sigma$. Тогда $\psi_i^\delta \neq \lambda_i^\delta$ для некоторого $i \in A_j$. Это, в свою очередь, означает, что $f^{(j,i)} \psi_i^\delta f^{(i\delta,j)} \neq f^{(j,i)} \lambda_i^\delta f^{(i\delta,j)}$, то есть $[\bar{\psi}]_i \neq [\bar{\lambda}]_i$ для некоторого $i \in A_j$ и, следовательно, $\psi\theta \neq \lambda\theta$.

Кроме этого, для произвольного элемента $(\beta, t) \in Aut S_j \bar{i} \mathfrak{S}[A_j]$ существует такой автоморфизм $d = \{d_i^t\}_{i \in A_j} \in Aut Fr[T_j]$, что $d_i^t = f^{(i,j)}[\beta]_i f^{(j,it)}$ для всех $i \in A_j$. Тогда $d\theta = (\beta, t)$. Таким образом, θ — биекция.

Теорема доказана.

2.6 Из результатов пунктов 2.4, 2.5 следует основной результат работы:

Теорема. Группа автоморфизмов $Aut Fr[T]$ свободного произведения семейства T произвольных π -регулярных полугрупп S_i , $i \in I$ изоморфна прямому произведению $\prod_{j \in I'} Aut S_j \bar{i} \mathfrak{S}[A_j]$ сплетений групп автоморфизмов $Aut S_j$ полугрупп S_j с симметрическими группами $\mathfrak{S}[A_j]$ на множествах A_j , $j \in I'$.

Этот результат был анонсирован в [7].

2.7 Из теоремы п.2.6 получаем следствие.

Следствие. Группа автоморфизмов свободного произведения одноэлементных полугрупп изоморфна симметрической группе на множестве одноэлементных полугрупп.

Литература

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон // М.: Мир. — 1972. — Т.2. — 422 с.
2. Курош, А.Г. Теория групп / А. Г. Курош // 3-е изд. М.: Наука. — 1967. — 648 с.

3. Новиков, Б. В. Определяющие соотношения и 0-модули над полугруппой / Б. В. Новиков // В кн.: "Теория полугрупп и ее прилож. Полиадич. полугруппы. Полугруппы преобразований". Изд-во Саратов. ун-та. — 1983. — С. 94–99.
4. Жучок, А.В. Групи автоморфізмів ортогональних сум напівгруп / А. В. Жучок // Доповіді НАН України. — № 6. — 2011. — С. 12–16.
5. Bognanović, S. Polugrupe / S. Bognanović, M. Ćirić // Prosveta. Niš. — 1993.
6. Шеврин, Л. Н. К теории эпигрупп. I / Л. Н. Шеврин // Матем. сб. — 185 (8). — 1994. — С. 129–160.
7. Zhuchok, A.V. Automorphism groups of free product of π -regular semigroups / A. V. Zhuchok // XII International Conference on Representations of Algebras and Workshop, Torun, Poland. — 2007. — P. 77–78.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко
E-mail: zhuchok_a@mail.ru

Поступило 26.03.11

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ