Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(67), 2011

УДК 512.542

Функторная характеризация конечных разрешимых групп

Н. С. Косенок

В работе изучается строение групп в зависимости от свойств их τ -нормальных подгрупп. Доказана следующая теорема. Пусть H — подгруппа группы G. Тогда H τ-нормальна в G, тогда и только тогда, когда существует τ-подгруппа T в G такая, что $TH = G$, и $H \cap T = H_G$.
Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, τ-нормальная подгруппа.

The article studies the structure of groups depending on the properties of their τ-normal subgroups. The following theorem has been proved. Let H be a subgroup of a group G. We say that H is τ-normal in G if and only if for some subnormal τ-subgroup T of G it is true that $TH = G$ and $H \cap T \leq H_G$. The new characterizations of finite group solubility in the terms of τ-normal subgroups are obtained.
Keywords: finite group, soluble group, τ-normal subgroup.

1 Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Многие из наиболее важных классов конечных групп могут быть охарактеризованы на основе свойств их максимальных подгрупп. Напомним, например, что конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны. Согласно знаменитой теореме Хупперта, конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп — простые числа. Согласно [1], конечная группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда для любой ее максимальной подгруппы M имеет место $|G : M| = |G : M|_n$ (здесь $|G : M|_n$ — нормальный индекс M в G, который совпадает с порядком главного фактора H/K, где $K \subseteq M$ и $H \nsubseteq M$). Отметим, что в действительности, как это показано в теории формации конечных групп, все наиболее известные классы конечных групп, замкнутые относительно фраттиниевых расширений своих групп, могут быть охарактеризованы по свойствам их максимальных подгрупп (см. монографии [2, 3]).

Свойства максимальных подгрупп лежат и в основе многих признаков принадлежности конечной группы тому или иному классу. Напомним некоторые из наиболее известных результатов в этом направлении. Согласно неопубликованному результату Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индекс любой ее максимальной подгруппы является либо простым числом либо квадратом простого числа (см. [4], с. 267). Это важное наблюдение Холла дало толчок серии глубоких исследований, связаных с изучением конечных групп, у которых индексы максимальных подгрупп обладают тем или иным свойством. В этой связи следует прежде всего отметить содержательную монографию М. В. Селькина [5], где найдена красивая связь между теорией классов Шунка и теорией максимальных подгрупп с заданными индексами, а также интересные работы С. Ф. Каморникова [6], где было впервые дано описание конечных групп, у которых индексы всех максимальных подгрупп являются либо простыми числами, либо квадратами простых чисел и Е. Грибовской и В. С. Монахова [7], где было получено описание разрешимых конечных групп с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. В работе Томпсона [8] было доказано, что конечная группа G является разрешимой и в случае, когда она обладает максимальной нильпотентной подгруппой нечетного порядка. В дальнейшем Янко [9] и Дескинс [10] установили, что конечная группа разрешима, если она обладает максимальной нильпотентной подгруппой у которой силовская 2-подгруппа имеет класс, не превосходящий 2.

Целью данной работы является дальнейшее изучение строения групп в зависимости от свойств их максимальных подгрупп.

2 Определение, примеры и основные свойства τ-нормальных подгрупп

Подгруппа H группы G называется c-нормальной в G [11], если в G имеется такая нормальная подгруппа T, что $HT = G$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Понятие c-нормальности является естественным обобщением нормальности. Более того, многие результаты, связанные с условием нормальности для подгруппы, были расширены до c-нормальности (см., например [11–15]). В дальнейшем (см., например, [16]) был рассмотрен ряд аналогов c-нормальных подгрупп и для таких аналогов были получены результаты, доказательства которых весьма схожи. В данной работе мы рассматриваем понятие τ-нормальной подгруппы, позволяющее устранить возникающий в данном направлении параллелизм.

Напомним, что подгрупповой функтор (в смысле Скибы [17]) сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $\varphi(H) \in \tau(B)$ и $\varphi^{-1}(B) \in \tau(A)$.

Подгрупповой функтор τ называется наследственным, если для любой группы G и для любых ее подгрупп H и $T \in \tau(G)$ имеет место

$$T \cap H \in \tau(H).$$

Если $H \in \tau(G)$, то H называется τ-подгруппой группы G.

Многочисленные примеры подгрупповых функторов можно найти в [5, 17, 18]. Здесь мы отметим лишь несколько примеров (наследственных) подгрупповых функторов Скибы.

1 **Пример.** Пусть для любой группы G имеет место $\tau(G) = \{G\}$. Такой функтор называют тривиальным [17]. Понятно, что такой функтор является наследственным.

2 **Пример.** Пусть для любой группы G система $\tau(G)$ состоит из всех подгрупп группы G. Тогда τ — наследственный подгрупповой функтор. Такой подгрупповой функтор называют единичным [17].

3 **Пример.** Пусть для любой группы G система $\tau(G)$ состоит из всех нормальных подгрупп группы G. Тогда τ — наследственный подгрупповой функтор.

4 **Пример.** Пусть для любой группы G система $\tau(G)$ состоит из всех субнормальных подгрупп группы G. Тогда согласно [3] τ — подгрупповой функтор и он является наследственным.

Дадим теперь основное понятие данной работы.

5 **Определение.** Пусть G — группа. Тогда подгруппу H группы G будем называть τ-нормальной, если существует такая τ-подгруппа T в G, что $HT = G$? и $H \cap T \leq H_G$.

6 **Пример.** Пусть τ — подгрупповой функтор из примера 3. Тогда подгруппа H группы G является τ-нормальной в G в том и только в том случае, когда в G найдется нормальная подгруппа T, такая, что $G = HT$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Но подгруппы с таким

свойством являются c-нормальными. Таким образом, c-нормальные подгруппы — это в точности τ-нормальные подгруппы в случае, когда τ — подгрупповой функтор из примера 3.

7 **Пример.** Пусть τ — подгрупповой функтор из примера 2. Тогда подгруппа H группы G является τ-нормальной в G в том и только в том случае, когда в G найдется подгруппа T, такая, что $G = HT$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Но подгруппы с таким свойством названы в работе [16] c-дополняемыми. Таким образом, c-дополняемые подгруппы — это в точности τ-нормальные подгруппы в случае, когда τ — единичный подгрупповой функтор.

8 **Пример.** Пусть τ — подгрупповой функтор из примера 4. Тогда подгруппа H группы G является τ-нормальной в G в том и только в том случае, когда в G найдется субнормальная подгруппа T, такая, что $G = HT$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Но подгруппы с таким свойством названы в работе [19] слабо c-нормальными. Таким образом, слабо c-нормальные подгруппы — это в точности τ-нормальные подгруппы в случае, когда τ — подгрупповой функтор из примера 4.

Покажем теперь, что примеры 6 — 8 выделяют, в общем случае, различные системы подгрупп в группе.

9 **Пример.** Пусть $G = A_5 \wr Z_2 = [A_1 \times A_2]Z_2$, где $A_1 \times A_2$ — база группы G, и $A_1 = A_2 = A_5$ есть знакопеременная группа степени 5. Пусть

$$\Delta = diag[A_1 \times A_2] = \{f \in A_1 \times A_2 | f(1) = f(2)\}.$$

Тогда $\Delta \cap A_1 = 1$ и $\Delta \cap A_2 = 1$. Кроме того, нетрудно показать, что $\Delta A_2 = A_1 A_2$. Следовательно, $G = A_1(\Delta Z_2)$, и $A_1 \cap \Delta Z_2 = 1$. Ввиду вышеуказанного мы видим, что

$$A_1 \cap (\Delta Z_2) \subseteq (\Delta Z_2)_G,$$

и A_1 субнормальна в G. Тогда, очевидно, мы также видим, что $A_1 \times A_2$ есть единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Следовательно,

$$(A_1 \times A_2) \cap \Delta Z_2 = \Delta \not\subseteq (\Delta Z_2)_G.$$

Это показывает, что подгруппа ΔZ_2 не τ_1-нормальна в G, но ΔZ_2 τ_2-нормальна в G, где τ_1 — подгрупповой функтор из примера 6, а τ_2 — подгрупповой функтор из примера 8.

10. **Пример.** Снова обратимся к примеру 9. Мы уже знаем, что $A_1 \times A_2$ является единственной минимальной нормальной подгруппой в группе G. А ввиду [7] субнормальными в G являются лишь подгруппы $1, A_1, A_2, A_1 \times A_2, G$. Рассмотрим подгруппу Δ. Понятно, что субнормальным добавлением к Δ в G является лишь сама группа G. При этом $\Delta_G = 1$. Таким образом, подгруппа Δ не является τ-нормальной в G, где τ — подгрупповой функтор из примера 4.

11. **Пример.** Пусть p и q — различные простые числа, Z_p и Z_q — группы порядков p и q соответственно. Пусть

$$G = Z_p \wr (Z_q \wr Z_p) = [K](Z_q \wr Z_p),$$

где K — база сплетения G. Группа G бипримарна и поэтому $G = G_p G_q$ для произвольных силовской p-подгруппы G_p и силовской q-подгруппы G_q группы G. Понятно, что G_p и G_q τ-нормальны, где τ — подгрупповой функтор из примера 2. Допустим, что обе эти подгруппы τ_1-нормальны, где τ_1 — подгрупповой функтор из примера 4. Легко видеть, что $(G_q)_G = 1$. Значит, если G_q τ_1 — нормальна в G, то в G имеется такая субнормальная подгруппа T, что $G_q \cap T = 1$ и $G_qT = G$. Ясно, что T — силовская p-подгруппа в G. Применяя теперь [2, с. 71], видим, что $G_p \trianglelefteq G$. Следовательно,

$$G_p \cap (Z_q \wr Z_p) \trianglelefteq Z_q \wr Z_p,$$

что невозможно. Итак, G_q не является τ_1-нормальной в G.

В дальнейшем τ — некоторый фиксированный подгрупповой функтор.

12. **Определение.** Группа G называется τ-простой, если G не содержит какой-либо τ-нормальной подгруппы, кроме единичной группы 1 и самой группы G.

Пусть H — произвольная подгруппа группы G. И пусть T — такая τ-подгруппа из G, что $HT = G$ и $H \cap T = 1$. Тогда будем говорить, что T — τ-дополнение к H в G.

Следующая теорема описывает наиболее общие свойства τ-нормальных подгрупп.

13. **Теорема.** *Пусть G — группа. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) Пусть H — подгруппа группы G. Тогда H τ-нормальна в G, тогда и только тогда, когда существует τ-подгруппа N в G такая, что $G = HN$ и $H \cap N = H_G$.

(2) Если группа G проста, то любая собственная τ-нормальная подгруппа обладает τ-дополнением в G.

(3) Пусть подгрупповой функтор τ таков, что $1 \in \tau(G)$ для любой группы G. Тогда, если некоторая группа является τ-простой, то она проста.

(4) Если H τ-нормальна в G, где τ — наследственный подгрупповой функтор и $H \le M \le G$, то H τ-нормальна в M.

(5) Пусть $K \trianglelefteq G$, и $K \le H$. Тогда H τ-нормальна в G, если и только если H/K τ-нормальна в G/K.

(6) Пусть H — π-подгруппа группы G и N — нормальная π'-подгруппа. Если H τ-нормальна в G, то HN/N τ-нормальна в G/N. Кроме того, если $N \le N_G(H)$, то обратное утверждение тоже верно.

(7) Пусть $H \le G$ и $L \le \Phi(H)$. Если L τ-нормальна в G, то $L \triangleleft G$ и $L \le \Phi(G)$.

Доказательство. (1) Достаточность ясна. Проверим необходимость. Предположим, что существует τ-подгруппа K в G такая, что $G = HK$ и $H \cap K \le H_G$. Пусть $N = KH_G$. При каноническом эпиморфизме $\varphi : G \to G/H_G$ имеет место $\varphi(K) = H_GK/H_G$. Следовательно, ввиду определения подгруппового функтора, имеем

$$H_GK/H_G \in \tau(G/H_G).$$

Понятно также, что

$$H_GK = (H_GK/H_G)^{\varphi^{-1}}.$$

Таким образом, N — τ-подгруппа группы G такая, что

$$HN = HKH_G = HH_GK = HK = G,$$

и

$$H \cap N = H \cap KH_G = H_G(H \cap K) = H_G.$$

Этим доказано (1).

(2) Предположим, что группа G проста и пусть H — произвольная собственная τ-нормальная подгруппа группы G. Тогда по определению в группе G имеется такая τ-подгруппа T, что $HT = G$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Если $H_G = 1$, то T — τ-дополнение к H

в G. Если же $H_G \neq 1$, то ввиду простоты группы G имеет место $H_G = H = G$. Этим доказано (2).

(3) Пусть для любой группы G имеет место $1 \in \tau(G)$. Тогда для любой нормальной подгруппы N любой группы G имеет место $N \in \tau(G)$. Действительно, $N = \varphi^{-1}(1)$, где φ — канонический эпиморфизм группы G на G/N. Пусть теперь группа G τ-проста. Тогда ввиду сказанного выше, она является простой.

(4) Предположим, что τ — наследственный подгрупповой функтор. Пусть τ-подгруппа T группы G такова, что $HT = G$ и

$$H \cap T \leq H_G.$$

Тогда

$$M = M \cap (HT) = H(M \cap T).$$

Так как $T \in \tau(G)$, то ввиду условия, $M \cap T \in \tau(M)$. Кроме того,

$$H \cap (M \cap T) = (H \cap T) \cap M \leq H_G \cap M \leq H_M.$$

Итак, мы видим, что H τ-нормальна в M.

(5) Предположим, что H/K τ-нормальна в G/K. Тогда существует подгруппа $N/K \in \tau(G/K)$ такая, что $G/K = (H/K)(N/K)$ с

$$(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{(G/K)}.$$

Теперь легко понять, что $G = HN$ и $H \cap N \leq H_G$. Обратное утверждение может быть доказано таким же образом.

(6) Если H τ-нормальна в G, то существует подгруппа $K \in \tau(G)$ такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$. Так как

$$|G|_{\pi'} = |K|_{\pi'} = |KN|_{\pi'},$$

мы имеем

$$|K \cap N|_{\pi'} = |N|_{\pi'} = |N|,$$

и следовательно, $N \leq K$. Ясно, что $(HN/N)(K/N) = G/N$, и

$$(HN/N) \cap (K/N) = (H \cap K)N/N \leq H_G N/N \leq (HN/N)_{(G/N)}.$$

Следовательно, HN/N — τ-нормальная подгруппа G/N.

Наоборот, допустим, что HN/N — τ-нормальная подгруппа G/N, и $N \leq N_G(H)$. Пусть подгруппа $K/N \in \tau(G/N)$ такая, что $G/N = (HN/N)(K/N)$ и

$$(HN/N) \cap (K/N) = (H \cap K)N/N \leq L/N = (HN/N)_{(G/N)}.$$

Понятно, что $G = HNK = HK$. Так как $N \leq N_G(H)$, мы имеем $NH = N \times H$. Следовательно, $L = H_1 \times N$ с $H_1 = H \cap L \leq H$ и $H_1 \lhd L$. Так как $L \lhd G$, мы имеем, что $H_1 \lhd G$. Это ведет к

$$H \cap K \leq H_1 \leq H_G,$$

и подгруппа H, следовательно, τ-нормальна в G.

(7) Так как подгруппа L τ-нормальна в G, существует подгруппа $K \in \tau(G)$, такая, что $G = LK$, и $L \cap K \leq L_G$. Значит,

$$H = H \cap G = L(H \cap K) = H \cap K,$$

так как $L \leq \Phi(H)$. Поэтому

$$L \subseteq (H \cap K) \cap L \leq L \cap K \leq L_G.$$

Таким образом, мы имеем $L \triangleleft G$. Если $L \not\leq \Phi(G)$, то существует максимальная подгруппа M в группе G, такая, что $LM = G$. Значит,

$$H = H \cap G = L(H \cap M) = H \cap M \leq M.$$

Поэтому $G = LM \leq HM \leq M < G$, противоречие. Теорема доказана.

14. **Следствие** [11]. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) Пусть H — подгруппа группы G. Тогда H c-нормальна в G, если и только если существует нормальная подгруппа N группы G, такая, что $G = HN$, и $H \cap N = H_G$.

(2) Если H c-нормальна в G и $H \leq M \leq G$, то H c-нормальна в M.

(3) Пусть $K \trianglelefteq G$, и $K \leq H$. Тогда H c-нормальна в G, если и только если H/K c-нормальна в G/K.

(4) Пусть H — π-подгруппа группы G, и N — нормальная π'-подгруппа. Если H c-нормальна в G, то HN/N c-нормальна в G/N. Кроме того, если $N \leq N_G(H)$, то обратное утверждение тоже верно.

(5) Пусть $H \leq G$ и $L \leq \Phi(H)$. Если L c-нормальна в G, то $L \triangleleft G$ и $L \leq \Phi(G)$.

15. **Следствие** [16]. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) Пусть H — подгруппа группы G. Тогда H c-дополняема в G, если и только если существует подгруппа N группы G такая, что $G = HN$, и $H \cap N = H_G$.

(2) Если H c-дополняема в G и $H \leq M \leq G$, то H c-дополняема в M.

(3) Пусть $K \trianglelefteq G$, и $K \leq H$. Тогда H c-дополняема в G, если и только если H/K c-добавляема слабо c-нормальна в G/K.

(4) Пусть H — π-подгруппа группы G, и N — нормальная π Если H c-дополняема в G, то HN/N c-дополняема в G/N. Кроме того, если $N \leq N_G(H)$, то обратное утверждение тоже верно.

(5) Пусть $H \leq G$ и $L \leq \Phi(H)$. Если L c-дополняема в G, то $L \triangleleft G$ и $L \leq \Phi(G)$.

Литература

1. Deskins, W. E. On maximal subgroups / W. E. Deskins // Proc. Symp. Pure Math. — 1959. — V.1. — P. 100–104.

2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М.: Наука, 1978.— 272 с.

3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

4. Robinson, D. A course in the theory of groups / D. Robinson. — Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin. — 1982.

5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 144 с.

6. Каморников, С.Ф. К теореме Ф.Холла / С. Ф. Каморников // Вопросы алгебры. — 1990 — Выпуск 5. — С. 45–52.

7. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Математические заметки. — 2001. — Т.70, Выпуск 4. — С. 603–612.

8. Thompson, J.G. Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime oreder / J. G. Thompson // Proc Nat.Acad. Sci. USA. — 1959. — V.45. — P. 578–581.

9. Janko, Z. Finite groups with a nilpotent maximal subgroup / Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. — 1964. — V.4 — P. 449–451.

10. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W. E. Deskins // Proc. Symp. Pure Math. — 1959. — V.1. — P. 100–104.

11. Wang, Y. c-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. — 1996. — № 180. — P. 954–965.

12. Guo, Xiuyun. On c-normal subgroups of finite groups / Xiuyun Guo, K. P. Shum // Publicationes Mathematicae (Debrecen). — 2001. — № 58. — P. 85–92.

13. Ballester-Bolinches, A. On c-supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Guo Xiuyun // Clasg. Math.J. — 2000. — № 42. — P. 383–389.

14. Guo, Xiuyun. The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups / Xiuyun Guo, Deyu Li // J.Pure Appl. Algebra. — 2000. — № 150. — P. 53–60.

15. Guo, Xiuyun. The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups II / Xiuyun Guo, Deyu Li // Communications in Algebra. — 1998. — № 26. — P. 1913–1922.

16. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. — 2000. — № 224. — P. 467–478.

17. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

18. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. — Мн.: Беларуская навука, 2003.

19. Miao, L. Finite groups with c-normal subgroups / L. Miao, X. Chen, W. Guo // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. — 2001. — V.25, № 3.

УО ФПБ ГФ "Международный институт трудовых и социальных отношений"

Поступило 21.01.10