Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(67), 2011

УДК 512.542

О c_ω-неприводимых формациях $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 2

П. А. Жизневский, В. Г. Сафонов

Получено описание неприводимых ω-композиционных формаций $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 2, где $\mathfrak{H}$ — непустая нильпотентная насыщенная формация.
Ключевые слова: конечная группа, формация, ω-композиционный спутник, ω-композиционная формация, неприводимая формация, дефект формации.

In this paper we describe irreducible ω-composition formations with $\mathfrak{H}_\omega$-defect 2, where $\mathfrak{H}$ is non-empty nilpotent saturated formation.
Keywords: finite group, formation, ω-composition satellite, ω-composition formation, irreducible formation, defect of formation.

Все рассматриваемые группы конечны. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1-3]. Напомним, что если $\mathfrak{H}$ — непустой класс групп и $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-композиционная формация, то длину решетки ω-композиционных формаций, находящихся между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, называют $\mathfrak{H}_\omega$-дефектом формации $\mathfrak{F}$. Задача изучения и классификации ω-композиционных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2 поставлена в работе А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [3] (проблема 6). В работе авторов [4] получено описание ω-композиционных формаций с нильпотентным дефектом 1. В данной заметке получено описание неприводимых ω-композиционных формаций $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 2, где $\mathfrak{H}$ — непустая нильпотентная насыщенная формация.

Группа G называется критической, если G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$. Критическая группа $G \in \mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}$-базисной, если у формации $\mathrm{form}\, G$ имеется лишь единственная максимальная подформация, которая содержится в $\mathfrak{H}$. В дальнейшем, для краткости, вместо "ω-композиционная формация" будем писать "c_ω-формация".

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая нильпотентная насыщенная формация. Тогда и только тогда c_ω-неприводимая формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{H}_\omega$-дефект 2, когда $\mathfrak{F} = c_\omega \mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем P, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, $P = G^{\mathfrak{M}}$, группа G является $\mathfrak{M}$-базисной, где $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee_\omega c_\omega \mathrm{form}\,(G/P)$, формация $c_\omega \mathrm{form}\,(G/P)$ имеет $\mathfrak{H}_\omega$-дефект 1;

2) $G = [P]H$, где P — абелева p-группа, $p \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$, $P \not\subseteq \Phi(G)$ и H — группа простого порядка $q \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

3) $G = [P]H$, где P — абелева p-группа, $p \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$, $P \not\subseteq \Phi(G)$, а H — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:

3.1) монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{H}}$ таким, что $\pi(Com(Q)) \cap \omega = \emptyset$ и $H/Q \in \mathfrak{N}_p$;

3.2) $H = [Q]N$ — монолитическая группа с цоколем Q, где $Q = H^{\mathfrak{H}}$ — абелева q-группа, $q \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$, $q \neq p$ и $|N| = p$;

3.3) циклическая примарная группа порядка q^2, где $q \neq p$ и $q \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

3.4) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, где $q \neq p$ и $q \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — c_ω-неприводимая формация $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 2, $\mathfrak{M}$ — ее максимальная c_ω-подформация $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 1, f и m — минимальные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Из c_ω-неприводимости формации $\mathfrak{F}$ следует, что она является $\mathfrak{M}_\omega$-критической формацией. По теореме 1 [3] формация $\mathfrak{F}$ имеет канонический ω-композиционный спутник F такой, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \omega$. Тогда согласно теореме 1 [5], $\mathfrak{F} = c_\omega \mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$, что либо $\pi = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{M}$-критическая формация, либо $\pi \neq \varnothing$, $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, $P \not\subseteq \Phi(G)$ и $f(p)$ — $\mathfrak{N}_p m(p)$-критическая формация, где $p \in \pi$.

По теореме 2 [6] формация $\mathfrak{M}$ имеет вид $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_\omega \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}$ — $\mathfrak{H}_\omega$-критическая формация. Ввиду леммы 10 [4], $m = m_1 \vee k$, где m_1 и k — минимальные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{K}$ соответственно. Согласно теореме 1 [7], $\mathfrak{K} = c_\omega \mathrm{form}\, K$, где K — такая монолитическая группа с цоколем $R = K^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(K)$, что либо $\pi(Com(R)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi(Com(R)) \cap \omega \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

а) K — группа простого порядка $r \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$;

б) $K = [R]T$, где $R = C_K(R)$ — абелева r-группа, $r \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и $|T| = t$, r и t — различные простые числа.

Предположим, что $\pi = \emptyset$. Тогда $R_\omega(G) = 1$ и по лемме 5 [3], $f(\omega') = \mathrm{form}\, G$. Значит, $\mathrm{form}\, G$ — $\mathfrak{M}$-критическая формация. Поэтому G является $\mathfrak{M}$-базисной группой. Поскольку $c_\omega \mathrm{form}\,(G/P) \subseteq \mathfrak{M}$, то в силу леммы 18 [6] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект d формации $c_\omega \mathrm{form}\,(G/P)$ не превосходит 1. Если $d = 0$, то $G/P \in \mathfrak{H}$. Но $G \notin \mathfrak{H}$. Поэтому $P = G^{\mathfrak{H}}$ и по теореме 1 [7] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Следовательно, $d = 1$ и $c_\omega \mathrm{form}\,(G/P) \not\subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — c_ω-неприводимая формация и $\mathfrak{M}$ — формация $\mathfrak{H}_\omega$-дефекта 1, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — максимальная c_ω-подформация в $\mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee_\omega c_\omega \mathrm{form}\,(G/P)$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Предположим теперь, что $\pi \neq \emptyset$, $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, $P \not\subseteq \Phi(G)$ и $f(p)$ — $\mathfrak{N}_p m(p)$-критическая формация, где $p \in \pi$. Ясно, что $C^p(G) = P$. Тогда по лемме 5 [3], $f(p) = \mathrm{form}\,(G/P)$.

Заметим, что $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega$. Действительно, включение $\pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega \subseteq \pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega$ очевидно. Установим справедливость обратного включения. Предположим противное, и пусть $l \in (\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega) \setminus (\pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega)$. Тогда $c_\omega \mathrm{form}\, Z_l = \mathfrak{N}_l \not\subseteq \mathfrak{M}$, где Z_l — группа простого порядка l. Поскольку $\mathfrak{M}$ — максимальная c_ω-подформация в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_l \not\subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega \mathfrak{N}_l$, что противоречит c_ω-неприводимости формации $\mathfrak{F}$. Значит, $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega$. Таким образом, $p \in \pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega$.

Используя лемму 5 [3] и леммы 10, 11 [4] рассмотрим все возможные значения спутника m на простом числе p:

1) если $p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \setminus \pi(Com(\mathfrak{K}))$, то $m(p) = (1) \vee \emptyset = (1)$;

2) пусть для K выполняется условие $\pi(Com(R)) \cap \omega = \varnothing$. Если $p \in \pi(Com(\mathfrak{K})) \setminus \pi(Com(\mathfrak{M}))$ или $p \in \pi(Com(\mathfrak{K}) \cap \pi(Com(\mathfrak{M}))$, то соответственно получаем $m(p) = \emptyset \vee \mathrm{form}\,(K/C^p(K)) = \emptyset \vee (1) = (1)$ или $m(p) = (1) \vee \mathrm{form}\,(K/C^p(K)) = (1) \vee (1) = (1)$;

3) если K удовлетворяет условию а) и $p \in \pi(Com(\mathfrak{K})) \setminus \pi(Com(\mathfrak{M}))$, то $\mathfrak{K} = \mathfrak{N}_p$, где $p \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и, значит, $m(p) = \emptyset \vee (1) = (1)$;

4) пусть K удовлетворяет условию б) и $p = t \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Если $p \in \pi(Com(\mathfrak{K})) \setminus \pi(Com(\mathfrak{M}))$ или $p \in \pi(Com(\mathfrak{K}) \cap \pi(Com(\mathfrak{M}))$, то соответственно получаем $m(p) = \emptyset \vee \mathrm{form}\,(K/C^p(K)) = \emptyset \vee (1) = (1)$ или $m(p) = (1) \vee \mathrm{form}\,(K/C^p(K)) = (1) \vee (1) = (1)$;

5) пусть для K выполняется условие б) и $p = r \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Если $p \in \pi(Com(\mathfrak{K})) \setminus \pi(Com(\mathfrak{M}))$ или $p \in \pi(Com(\mathfrak{K}) \cap \pi(Com(\mathfrak{M}))$, то соответственно получаем $m(p) = \emptyset \vee \mathrm{form}\,(K/C^p(K)) = \emptyset \vee \mathrm{form}\,(K/R) = \mathrm{form}\, T$ или $m(p) = (1) \vee \mathrm{form}\,(K/C^p(K)) = (1) \vee \mathrm{form}\,(K/R) = \mathrm{form}\, T$.

Таким образом, возможны два случая: либо $m(p) = (1)$, либо $m(p) = \mathrm{form}\, T$.

Рассмотрим случай, когда $m(p) = (1)$, т. е. выполняются условия 1)-4). Тогда $f(p) = \mathrm{form}\,(G/P)$ — $\mathfrak{N}_p$-критическая формация. Пусть H — группа минимального порядка из $f(p) \setminus \mathfrak{N}_p$. Тогда H — монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$ и $f(p) = \mathrm{form}\,(G/P) = \mathrm{form}\, H$. В силу насыщенности формации $\mathfrak{N}_p$, имеем $Q \not\subseteq \Phi(H)$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $|Q| = q$ и H — q-группа, где $q \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Понятно, что $q \neq p$. Так как $H/Q \in \mathfrak{N}_p$, то $H = Q$ — группа простого порядка q. Поскольку $O_p(H) = 1$, то по лемме 18.8 [1] существует точный неприводимый F_pH-модуль V, где F_p — поле из p элементов. Положим $F = [V]H$. Поскольку $F/O_p(V) = F/V \simeq H \in f(p) = \mathrm{form}\, H$ и спутник f — внутренний, то по лемме 4 [3], $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $c_\omega\mathrm{form}\, F \subseteq \mathfrak{F}$. Если $c_\omega\mathrm{form}\, F \subset \mathfrak{F}$, то $c_\omega\mathrm{form}\, F \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 2 [8] получаем $H \simeq F/V = F/C^p(F) \in m(p) = (1)$, т. е. $H = 1 \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}\, F$. Если $p \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$, то по теореме 1 [7] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Значит, $p \notin \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и группа F удовлетворяет условию 2) теоремы.

Предположим теперь, что $H \notin \mathfrak{H}$. Пусть $\pi(Com(Q)) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $R_\omega(H) = 1$. Поскольку $H \in \mathfrak{M}$, то $H \simeq H/R_\omega(H) \in m(\omega') = m_1(\omega') \vee k(\omega') = (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \vee k(\omega')$. Если для K выполняется условие а) или б), то $k(\omega') \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $m(\omega') \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $H \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, K — монолитическая группа с цоколем R таким, что $\pi(Com(R)) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $k(\omega') = \mathrm{form}\, K$ и $p \in \pi(Com(\mathfrak{H})) \cap \omega$. Отсюда получаем, что $H \in (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \vee \mathrm{form}\, K = \mathrm{form}\,((\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup \mathrm{form}\, K) = \mathrm{form}\,((\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup \{K\})$. Таким образом, $H \in \mathrm{form}\,((\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup \{K\}) \setminus \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'} \subseteq \mathfrak{H}$ и $K^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(K)$, то у каждой группы D из $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \cup \{K\}$ ее $\mathfrak{H}$-корадикал $D^{\mathfrak{H}}$ не имеет фраттиниевых D-главных факторов. Теперь согласно лемме 1.2.29 [2] H является гомоморфным образом группы K. Но $K/R \in \mathfrak{H}$. Значит, $H \simeq K$. Понятно, что $O_p(H) = 1$. Тогда по лемме 18.8 [1] существует точный неприводимый F_pH-модуль V, где F_p — поле из p элементов. Положим $F = [V]H$. Поскольку $F/O_p(V) = F/V \simeq H \in f(p) = \mathrm{form}\, H$ и спутник f — внутренний, то по лемме 4 [3], $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $c_\omega\mathrm{form}\, F \subseteq \mathfrak{F}$. Если $c_\omega\mathrm{form}\, F \subset \mathfrak{F}$, то $c_\omega\mathrm{form}\, F \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 2 [8] получаем $H \simeq F/V = F/C^p(F) \in m(p) = (1) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}\, F$. Таким образом, H удовлетворяет условию 3.1) теоремы.

Пусть теперь $\pi(Com(Q)) \cap \omega \neq \emptyset$. Тогда Q — абелева q-группа, где $q \in \omega$. Так как $Q \not\subseteq \Phi(H)$, то $C^q(H) = Q$. Поскольку $H \in \mathfrak{M}$, то $H/Q \simeq H/C^q(H) \in m(q)$. Если для K выполняется условие $\pi(Com(R)) \cap \omega = \emptyset$ или условие а), то $m(q) = (1)$. Тогда получаем, что $H = Q$ — группа простого порядка q, где $q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Заметим, что $q \in \pi(Com(\mathfrak{M}))$. Тогда $q \in \pi(Com(\mathfrak{K})) \setminus \pi(Com(\mathfrak{M}))$. Если $\pi(Com(R)) \cap \omega = \emptyset$, то $q \in \pi(Com(K/R))$. Но $K/R \in \mathfrak{H}$. Значит, $q \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Противоречие. Значит, такой случай не возможен. Следовательно, $\mathfrak{K} = \mathfrak{N}_p$. Но тогда $q = p$ и, значит, $H \in \mathfrak{N}_p$, что противоречит выбору группы H. Поэтому не возможен и случай, когда для K выполняется условие а). Пусть теперь для K выполняется условие б) и $p = t \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Тогда $q = r \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{H}))$ и $m(q) = \mathrm{form}\, T$. Поскольку $Q \not\subseteq \Phi(H)$, то найдется такая максимальная подгруппа N группы H, что $H = [Q]N$. Но $N \simeq H/Q \in m(q) = \mathrm{form}\, T$. Значит, N — элементарная абелева p-группа. Являясь абелевой неприводимой группой автоморфизмов, группа N циклична. Поэтому $|N| = p$. Поскольку $O_p(H) = 1$, то по лемме 18.8 [1] существует точный неприводимый F_pH-модуль V, где F_p — поле из p элементов. Положим $F = [V]H$. Поскольку $F/O_p(V) = F/V \simeq H \in f(p) = \mathrm{form}\, H$, то по лемме 4 [3], $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $c_\omega\mathrm{form}\, F \subseteq \mathfrak{F}$. Если $c_\omega\mathrm{form}\, F \subset \mathfrak{F}$, то $c_\omega\mathrm{form}\, F \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 2 [8] получаем $H \simeq F/V = F/C^p(F) \in m(p) = (1)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}\, F$. Таким образом, H удовлетворяет условию 3.2) теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $m(p) = \mathrm{form}\, T$, т. е. выполняется условие 5). Тогда $f(p) = \mathrm{form}\,(G/P)$ — $\mathfrak{N}_p\mathrm{form}\, T$-критическая формация. Пусть H — группа минимального порядка из $f(p) \setminus \mathfrak{N}_p\mathrm{form}\, T$. Тогда H — монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathrm{form}\, T}$ и $f(p) = \mathrm{form}\,(G/P) = \mathrm{form}\, H$.

Поскольку $H \in \mathfrak{M}$, то $c_\omega\mathrm{form}\, H \subseteq \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_\omega \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N} \vee_\omega \mathfrak{N}_r\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}$. Значит, $H \in \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}$. Если H — ненильпотентная группа, то ввиду ее монолитичности получаем, что Q — r-группа. Но в рассматриваемом случае $p = r$. Значит, Q — p-группа. Кроме того, $H/Q \in \mathfrak{N}_p\mathrm{form}\, T$. Отсюда следует, что $H \in \mathfrak{N}_p\mathrm{form}\, T$. Противоречие. Поэтому H — нильпотентная группа. Тогда $|Q| = q$ и H — q-группа, где $q \neq p$. Аналогично вышесказанному нетрудно показать, что $\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}\, F$, где $F = [V]H$, V — точный неприводимый F_pH-модуль, F_p — поле из p

элементов. Так как $\mathrm{form}\, T = m(p) \subseteq f(p) = \mathrm{form}\, H$, то $q = t \in \pi(Com(\mathfrak{H}))$. Пусть M — максимальная подгруппа группы H. Если $M = 1$, то $H = Q$ и по теореме 1 [7] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Значит, $M \neq 1$. Тогда согласно лемме 8.12 [1] $\mathrm{form}\, M$ — максимальная подформация в $\mathrm{form}\, H$. Значит, $\mathrm{form}\, M \subseteq \mathfrak{N}_p \mathrm{form}\, T$. Но M — q-группа и $q \neq p$. Значит, $\mathrm{form}\, M \subseteq \mathrm{form}\, T$. Таким образом, $\mathrm{form}\, H$ — $\mathrm{form}\, T$-критическая формация. Кроме того, поскольку $M \in \mathrm{form}\, T$, то M — элементарная абелева q-группа. Теперь ввиду монолитичности группы H получаем, что $|M| = q$. Если группа H — абелева группа, то она циклична. Следовательно, H — группа порядка q^2, т. е. H удовлетворяет условию 3.3) теоремы. Пусть теперь H — неабелева группа. Тогда в $\mathrm{form}\, H$ содержится минимальная неабелева подформация $\mathfrak{K}_1$. Если $\mathfrak{K}_1 \subset \mathrm{form}\, H$, то $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathrm{form}\, T \subseteq \mathfrak{A}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{form}\, H$. Теперь согласно лемме 18.13 [1], учитывая, что $H \in \mathfrak{N}$, получаем, что H либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. Если H — группа кватернионов порядка 8, то регулярное сплетение $F_1 = Z_p \wr Z_4$, где Z_p и Z_4 — соответственно циклические группы порядков p и 4, принадлежит $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ и $c_\omega \mathrm{form}\, F_1 \neq \mathfrak{F}$. Но всякая собственная c_ω-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $c_\omega \mathrm{form}\, F_1 = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен. Таким образом, H — неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, т. е. H удовлетворяет условию 3.4) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = c_\omega \mathrm{form}\, G$, где G — монолитическая группа с цоколем P и f — минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть группа G удовлетворяет условию 1). Поскольку группа G — $\mathfrak{M}$-базисная, то единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}\, G$ содержится в $\mathfrak{M}$. Так как $P = G^{\mathfrak{M}}$, то $G \notin \mathfrak{M}$. Значит, $f(\omega') = \mathrm{form}\, G$ — $\mathfrak{M}$-критическая. Следовательно, по теореме 1 [5] формация $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{M}_\omega$-критическая. Понятно, что $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee_\omega c_\omega \mathrm{form}\,(G/P) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $G \notin \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Значит, формация $\mathfrak{F}$ — c_ω-неприводима. Поскольку по условию $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $c_\omega \mathrm{form}\,(G/P)$ равен 1, то из леммы 18 [6] получаем, что $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Следовательно, $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Пусть группа G удовлетворяет условию 2). Предположим, что $q \in \omega$. Тогда по теореме 2 [9] формация $\mathfrak{F}$ c_ω-неприводима и ее единственная максимальная c_ω-подформация $\mathfrak{M}$ имеет ω-композиционный спутник m такой, что $m(a) = (1)$, если $a \in \{p, q, \omega'\}$ и $m(r) = \emptyset$, если $r \in \omega \setminus \pi(Com(G))$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega \mathfrak{N}_q$ и $\overline{m}$ — ее минимальный ω-композиционный спутник. Тогда из лемм 10, 11 [4] и леммы 5 [3] получаем, что $\overline{\mathfrak{M}} = CF_\omega(\overline{m}) = CF_\omega(m) = \mathfrak{M}$. Но по теореме 2 [6] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\overline{\mathfrak{M}}$ равен 1. Значит, $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Предположим теперь, что $q \notin \omega$. Тогда по теореме 2 [9] формация $\mathfrak{F}$ c_ω-неприводима и ее единственная максимальная c_ω-подформация $\mathfrak{M}$ имеет ω-композиционный спутник m такой, что $m(\omega') = \mathrm{form}\, H$, $m(p) = (1)$, $m(r) = \emptyset$, где $r \in \omega \setminus \pi(Com(G))$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega c_\omega \mathrm{form}\, H$ и $\overline{m}$ — ее минимальный ω-композиционный спутник. Тогда из лемм 10, 11 [4] и леммы 5 [3] получаем, что $\overline{\mathfrak{M}} = CF_\omega(\overline{m}) = CF_\omega(m) = \mathfrak{M}$. Но по теореме 1 [4] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\overline{\mathfrak{M}}$ равен 1. Значит, $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 3). Если для группы H выполняются условия 3.1) или 3.2) теоремы, то по теореме 2 [9] формация $\mathfrak{F}$ c_ω-неприводима и ее единственная максимальная c_ω-подформация $\mathfrak{M}$ имеет ω-композиционный спутник m_1 такой, что

$$m_1(a) = \begin{cases} \mathrm{form}\,(H/Q), & \text{если } a = p, \\ \mathrm{form}\,(G/C^q(G)), & \text{если } a = q \in (\pi(Com(G)) \cap \omega) \setminus \{p\}, \\ \emptyset, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(G)), \\ \mathrm{form}\,(G/R_\omega(G)), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Пусть для группы H выполняется условие 3.1) теоремы. Тогда спутник m_1 имеет следующие непустые значения: $m_1(p) = \mathrm{form}\,(H/Q)$ и $m_1(\omega') = \mathrm{form}\, H$. Если m — минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$, то по лемме 5 [3] получаем $m(p) = (1)$ и $m(\omega') = \mathrm{form}\, H$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}} = c_\omega \mathrm{form}\, H$. Тогда, как нетрудно заметить, $\overline{\mathfrak{M}} = CF_\omega(m) = \mathfrak{M}$. Но по теореме 1 [7] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\overline{\mathfrak{M}}$ равен 1. Значит, $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Пусть для группы H выполняется условие 3.2) теоремы. Тогда спутник m_1 имеет следующие непустые значения: $m_1(p) = m_1(q) = \mathrm{form}\, N$ и $m_1(\omega') = (1)$. Если m — минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$, то по лемме 5 [3] получаем $m(p) = m(\omega') = (1)$ и $m(q) = \mathrm{form}\, N$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}} = c_\omega \mathrm{form}\, H$. Легко видеть, что $\overline{\mathfrak{M}} = CF_\omega(m) = \mathfrak{M}$. Но по теореме 1 [7] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\overline{\mathfrak{M}}$ равен 1. Значит, $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Пусть теперь для группы H выполняются условия 3.3) или 3.4) теоремы. Тогда по лемме 5 [3], $f(p) = \mathrm{form}\,(G/P) = \mathrm{form}\, H$.

Покажем прежде, что $\mathrm{form}\, T$ — единственная максимальная подформация в $\mathrm{form}\, H$. Пусть H — циклическая примарная группа порядка q^2. Если M — максимальная подгруппа группы H, то $|M| = q$ и, значит, в силу леммы 8.12 [1], $\mathrm{form}\, T$ — единственная максимальная подформация в $\mathrm{form}\, H$. Если же H — неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, то ввиду леммы 18.13 [1] получаем, что $\mathrm{form}\, T$ — единственная максимальная подформация в $\mathrm{form}\, H$.

Рассмотрим группу $F = [V]T$, где V — точный неприводимый F_pT-модуль и T — группа простого порядка q. Пусть $\mathfrak{M} = c_\omega \mathrm{form}\, F$. Так как $F/O_p(F) = F/V \simeq T \in \mathrm{form}\, H = f(p)$, то по лемме 4 [3], $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, то $H \simeq G/P = G/C^p(G) \in m(p) = \mathrm{form}\, T$. Откуда получаем, что $\mathrm{form}\, H \subseteq \mathrm{form}\, T$, что противоречит сказанному в предыдущем абзаце. Поэтому $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что каждая собственная c_ω-подформация $\mathfrak{H}_1$ из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{M}$. Пусть m и h_1 — минимальные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_1$ соответственно. Поскольку $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{F}$, то найдется такое простое число $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, что $h_1(a) \subset f(a)$.

Пусть $q \in \omega$. Тогда $f(q) = f(\omega') = (1)$ и $f(r) = \emptyset$ для всех $r \in \omega \setminus \pi(Com(G))$. Поскольку $m(p) = \mathrm{form}\, T$ — единственная максимальная подформация в $f(p) = \mathrm{form}\, H$, то $h_1(p) \subseteq m(p)$. Пусть $a = p$. Поскольку $h_1(b) \subseteq f(b) = m(b)$ для всех $b \in (\omega \cup \{\omega'\}) \setminus \{p\}$, то по лемме 6 [3], $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Если же $a = q$ или $a = \omega'$, то $h_1(q) = \emptyset \subseteq m(q) = m(\omega') = (1)$ и $h_1(\omega') \subseteq f(\omega') = m(\omega') = (1)$ или, соответственно, $h_1(\omega') = \emptyset \subseteq m(q) = m(\omega') = (1)$ и $h_1(q) \subseteq f(q) = m(q) = (1)$. Значит, по лемме 6 [3], $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $q \notin \omega$. Тогда $f(\omega') = \mathrm{form}\, H$ и $f(r) = \emptyset$ для всех $r \in \omega \setminus \pi(Com(G))$. Так как $m(p) = m(\omega') = \mathrm{form}\, T$ — единственная максимальная подформация в $f(p) = f(\omega') = \mathrm{form}\, H$, то $h_1(p) \subseteq m(p)$ и $h_1(\omega') \subseteq m(\omega')$. Кроме того, очевидно, $h_1(r) \subseteq m(r)$ для всех $r \in \omega \setminus \pi(Com(G))$. Значит, по лемме 6 [3], $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная c_ω-подформация в $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 1 [7] $\mathfrak{H}_\omega$-дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ c_ω-неприводима и ее $\mathfrak{H}_\omega$-дефект равен 2. Теорема доказана.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М.: Наука, 1989. — 253 с.

2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

3. Шеметков, Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. — 2000. — том 52, № 6. — С. 783-797.

4. Жизневский, П.А. Формации групп с максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной нильпотентной подформацией / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вестник Полоцкого госуниверситета. Серия С. Фундаментальные науки. — 2007. — № 9. — С. 30-36.

5. Белоус (Буякевич), Л.И. О минимальных τ-замкнутых ω-композиционных не $\mathfrak{H}$-формациях / Л.И. Белоус; Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. — 2006. — № 4. — С. 21-25.

6. Жизневский, П.А. О τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формациях с булевой подрешеткой / П.А. Жизневский. — Препринт ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель. — 2010. — № 3. — 24 с.

7. Жизневский, П.А. О критических частично композиционных формациях / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вес. Нац. акад. навук. Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. — 2010. — № 3. — С. 44-49.

8. Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба , Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. — 1992. — Вып. 7. — С. 39-43.

9. Задорожнюк, М.В. О c_{ω}^{τ}-неприводимых формациях конечных групп / М.В. Задорожнюк // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. — 2006. — № 4. — С. 15-20.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 25.01.11