

О ПОЛНОТЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА
В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ю. Е. Дукаревич

Показана возможность построения измерительной схемы с более полным измерительным процессом (по сравнению с традиционным), активно использующим фазовые соотношения световых волн при анализе пространственной яркости некогерентного монохроматического объекта. Показано, что разрешающая способность более полного измерительного процесса может быть сделана выше дифракционного предела.

1. Ниже будут рассматриваться оптические приборы (типа телескопа, микроскопа и т. д.), предназначенные для анализа яркостного поля в общем случае некогерентного объекта.

Измерительный процесс в классических системах этого класса подразумевает определенный способ получения информации, заключающийся в регистрации и анализе квадрата амплитуды светового возбуждения в плоскости изображения. Поэтому фазовые соотношения пропадают и, следовательно, не используются полностью для получения и передачи информации об объекте.

В указанном смысле можно говорить об определенной неполноте измерительного процесса в традиционных приборах и предположить возможность построения систем с более полным измерительным процессом, активно использующим фазовые соотношения световых волн при анализе пространственной яркости (некогерентного) объекта.

Хорошо известны характерные черты традиционного измерительного процесса: свойство пространственной инвариантности и конечная разрешающая способность, определяемая полностью входным зрачком системы. Исключением является способ «сверхнаправленных» антенн, пригодный для частного случая ограниченного объекта и позволяющий в принципе превзойти дифракционный предел разрешения [1, 2].

Однако принципиальное требование об ограниченности объекта и малая для практической реализации этих систем величина сигнала позволяют все же считать для произвольного объекта, что разрешающая способность классических приборов ограничена дифракционным пределом (это общепринятое утверждение остается справедливым в общем случае и для приборов, не обладающих свойством пространственной инвариантности [3, 4]).

2. Голографические системы содержат фазовые соотношения на промежуточном этапе измерений [5] и в этом смысле являются системами с более полным измерительным процессом.

Можно было бы ожидать, что эти методы могут привести к значительному повышению разрешающей способности; однако традиционная схема голографии пассивно использует фазовые соотношения (регистрирует их и тождественно восстанавливает) и сводит выходную информацию к классической форме (пространственное распределение квадрата амплитуды поля). Поэтому традиционные голографические системы не используют всех возможностей измерительного процесса и не дают выигрыша в разрешающей способности по сравнению с классическими приборами.

3. Покажем теперь, что возможно построение оптических систем с более полным измерительным процессом, разрешающая способность которых выше дифракционного предела. В качестве примера рассмотрим схему прибора, изображенного на рис. 1. Этот прибор является двухлучевой интерферометрической установкой, в каждую ветвь которой введен преобразователь волнового поля I и II. На входе интерферометра имеется зеркало I, производящее угловое сканирование предмета (θ — угол сканирования), а на выходе — объектив L_5 с фокусным расстоянием F и фотодетектор $\Phi Д$. Будем считать выходным сигналом такой системы величину светового потока, прошедшего интерферометр и зарегистрированного $\Phi Д$.

Преобразователь I является двухлинзовой оборачивающей системой. Линзы L_1 и L_2 расположены в плоскостях $z=F$ и $z=3F$, фокусное расстояние их равно F , передняя и задняя фокальные плоскости линз L_1 и L_2

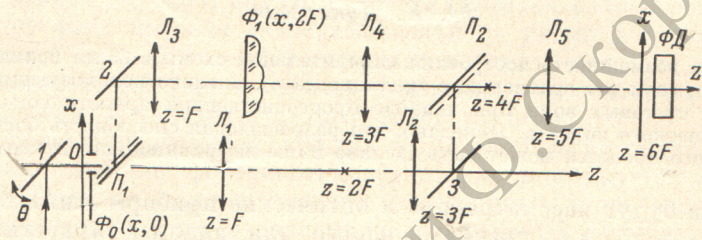


Рис. 1. Схема установки с полным измерительным процессом.
 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 — линзы, 1, 2, 3 — зеркала, Π_1, Π_2 — светоделительные пластины; $\Phi Д$ — фотодетектор.

совмещены. Входной зрачок прибора $\Phi_0(x, 0)$ расположен в передней фокальной плоскости линзы L_1 (и L_3). Преобразователь II аналогичен преобразователю I с тем отличием, что в плоскости $z=2F$ действительного изображения для удаленного предмета введен фазовый фильтр $\Phi_1(x, 2F)$.

Вычислим поле, создаваемое удаленным «точечным» источником монохроматического света, в плоскости $z=6F$. Для простоты вычисления будем рассматривать одномерный случай и положим, что входной зрачок прибора имеет зависимость коэффициента пропускания в виде функции Гаусса, т. е.

$$\Phi_0(x, 0) = \exp \left\{ -\left(\frac{x}{D} \right)^2 \right\}. \quad (1)$$

Точечный источник с угловой координатой α создает, очевидно, поле в плоскости входного зрачка

$$E(x, 0) = \exp \{ ik(\alpha + \theta)x \} \Phi_0(x, 0).$$

Как известно [6], световое поле в фокальной плоскости линзы L_1 при выбранном геометрическом расположении входного зрачка будет равно

$$E(x, 2F) = E_s \left(\frac{k}{F} x, 0 \right), \quad (2)$$

где

$$E_s(h, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, 0) e^{ikhx} dx$$

— угловой спектр поля, h — угловая координата.

Вычисления дают

$$E(x, 2F) = \frac{C}{\sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{k^2 u^2}{4} [x - F(\alpha + \theta)]^2 \right\}, \quad (3)$$

где $u = D/F$, C — постоянная.

Легко видеть, что линзы L_2 и L_5 образуют оборачивающую систему с увеличением $V = -1$, и поэтому световое поле в плоскости $z = 6F$, создаваемое световым потоком первого канала интерферометра, равно

$$E(x, 6F) = \frac{1}{\sqrt{2}} E(-x, 2F).$$

Это верно при достаточно больших размерах линз L_2 и L_5 , при которых не происходит срезания светового поля на их оправах.

Аналогично записывается поле в плоскости $z = 6F$, создаваемое световым потоком второго канала интерферометра

$$E_2(x, 6F) = \frac{C}{2} \exp\left\{-\frac{k^2 u^2}{4} [x + F(\alpha + \theta)]^2\right\} \Phi_1(-x).$$

Суммарное световое поле $\bar{E}(x, 6F)$ в плоскости $z = 6F$ будет

$$\bar{E}(x, 6F) = E_1(x, 6F) + E_2(x, 6F),$$

а освещенность O в этой плоскости

$$O(x, 6F) = \bar{E}(x, 6F) \bar{E}^*(x, 6F) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{k^2 u^2}{2} [x + (\alpha + \theta) F]^2\right\} \times \\ \times [1 + \cos\{\varepsilon(x - \gamma)^2\}]. \quad (4)$$

Таким образом, световое возбуждение, создаваемое в плоскости $z = 6F$ прибора, изображенного на рис. 1, является дифракционным распределением (определенным входным зрачком $\Phi_0(x, 0)$), промодулированным функцией $\cos\{\varepsilon(x - \gamma)^2\}$. Модуляция дифракционного изображения точечного источника знакопеременной функцией, период которой зависит от x (в данном случае линейно), и является причиной того, что суммарный J_0 световой поток становится зависимым от координаты x источника.

Действительно, суммарный световой поток J_0 , прошедший первый выход интерферометра, равен $J = \int_{-\infty}^{\infty} O(x, 6F) dx$. Интегрируя [7], получаем

$$J_0(\alpha + \theta) = C \left[1 + \frac{ku}{\sqrt{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2}} \exp\left\{-\frac{2k^2 u^2 \varepsilon^2 \gamma^2}{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2}\right\} \right] \exp\left\{-\frac{2k^2 u^2 \varepsilon^2}{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2} (\alpha + \theta)^2 F^2 - \right. \\ \left. - \frac{4k^2 u^2 \varepsilon^2 \gamma}{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2} (\alpha + \theta) F\right\} \cos\left\{\psi + \frac{k^4 u^4 \varepsilon}{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2} (\alpha + \theta)^2 + \frac{2k^4 u^4 \varepsilon \gamma}{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2} (\alpha + \theta) F\right\} \dots \quad (5) \\ \psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon}{k^2 u^2} + \frac{k^4 u^4 \varepsilon \gamma^2}{k^4 u^4 + 4\varepsilon^2}.$$

Из зависимости (5) видно, что J_0 состоит из постоянной (фона) и переменной составляющей (сигнала). График выходного сигнала $J_0(\alpha)$ представлен на рис. 2 при частных значениях $\varepsilon = 0.1 k^2 u^2$, $\gamma = 15/ku$. Такая форма сигнала не годится, конечно, для однозначного определения координаты α объекта. Легко построить схему, выходной сигнал которой будет в виде узкой щели пропускания (штриховая кривая на рис. 2).

Для этого представим N -канальную установку, в каждый канал которой введена схема, изображенная на рис. 1. Пусть начальное волновое поле $E(x, 0)$ светоделительным элементом делится на равные части и каждая часть поступает на один канал этой новой схемы. Подберем параметры схемы в ветвях таким образом, чтобы угловой период всех функций J_{0j} различался на малую величину. Будем считать выходным сигналом \bar{J}_0 такой схемы сумму J_{0j} . Легко видеть, что все колебания функции \bar{J}_0 будут сглажены и вид этой функции будет близок к виду традиционной функции рассеяния.

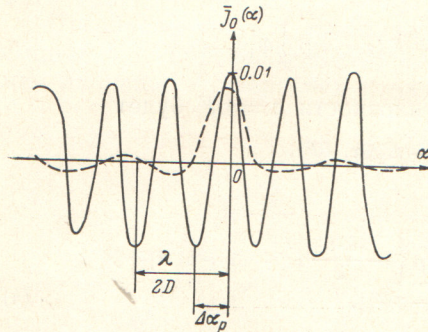
Таким образом, показана возможность построения оптической системы, коэффициент пропускания которой (без учета постоянного фона) имеет вид узкой щели; ширина последней приближенно равна периоду тригонометрического члена выражения (5).

По физическому смыслу переменную составляющую коэффициента пропускания можно считать функцией рассеяния (аппаратной функцией) для рассмотренной выше системы. Эта функция определяет диапазон углов $\Delta\alpha$, преимущественно проходящих через систему (при фиксированном θ).

$$\Delta\alpha \simeq \frac{\pi(k^4 u^4 + 4\epsilon^2)}{k^4 u^4 \epsilon \gamma F}. \quad (6)$$

Для некогерентного объекта с пространственной яркостью $B(\alpha)$ выходной сигнал описанной выше системы запишется, очевидно, в виде интеграла суперпозиции, характерном для линейных приборов

$$\Phi(\theta) = \int B(\alpha) J_0(\theta + \alpha) d\alpha + \text{const.} \quad (7)$$



Для линейных систем с аппаратной функцией в виде узкой щели предельное разрешимое расстояние $\delta\alpha_{\text{пр}}$ определяется шириной аппаратной функции и по критерию Релея равно

$$\delta\alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \Delta\alpha.$$

Рис. 2. Графики функции рассеяния.

$$\epsilon = 0.1k^2 u^2; \quad \gamma = \frac{15}{ku}.$$

Из выражения (6) следует, что при $\epsilon \neq 0$ с увеличением γ предельно разрешимое расстояние $\delta\alpha_{\text{пр}} \rightarrow 0$. Таким образом, разрешающая способность описанной выше схемы может быть сделана произвольно высокой за счет параметров фазового фильтра $\Phi_1(x, 2F)$. (Отметим, что аппаратная функция традиционной измерительной схемы с входным зрачком $\Phi_0(x, 0)$ дается выражением (3), что определяет предельно разрешимое расстояние $\delta\alpha_0 \approx \sqrt{2}/kD$).

Именно это обстоятельство позволяет рассматривать измерительный процесс, реализованный в описанной выше схеме, как более полный по сравнению с традиционным процессом анализа пространственной яркости объекта.

Покажем теперь, что фильтр $\Phi_1(x, 2F)$ физически реален. Пусть $\delta\alpha_{\text{пр}} = (1/m)\delta\alpha_0$, т. е. разрешающая способность схемы рис. 1 выше разрешающей способности традиционной телескопической схемы в m раз. Выберем $\epsilon = tk^2 u^2$, тогда из выражений (6) и (7) следует

$$\gamma = \frac{\pi(1 + 4t^2)}{2\sqrt{2}k^2 u^2 t}.$$

Фильтр $\Phi_1(x, 2F) = \exp\{i\epsilon(x + \gamma)^2\}$ представляет собой одномерную линзу, фокусное расстояние которой равно $f = k/2\epsilon$, а смещение центра от оси системы γ .

Требования $\epsilon = tk^2 u^2$ для любых t всегда может быть выполнено при умеренных значениях ϵ за счет уменьшения апертуры u , а смещение γ принципиально ничем не ограничено.

Характерной особенностью рассмотренной выше схемы является уменьшение величины сигнала с ростом разрешения. Коэффициент ослабления G сигнала определяется из выражения (5).

$$G = \frac{ku}{\sqrt{k^4 u^4 + 4\epsilon^2}} \exp\left\{-\frac{2k^2 u^2 \epsilon^2 \gamma^2}{k^4 u^4 + 4\epsilon^2}\right\}.$$

В рассмотренном примере (при $\epsilon = 0.1k^2 u^2$, $\gamma = 15/ku$, что определяет трехкратное увеличение разрешающей способности, по сравнению с дифракционным пределом) $G \simeq 0.01$.

Полученное значение G делает, видимо, рассмотренную схему практически осуществимой в противоположность известным схемам со сверхразрешением [1].

4. Рассмотрим подробнее физические причины повышения разрешающей способности в схеме рис. 1 сверх дифракционного предела. Единственным «нетрадиционным» элементом в этой схеме является преобразователь II. Этот элемент осуществляет совмещение плоскости действительного изображения объекта с фазовым фильтром $\Phi_1(x, 2F)$. В результате этого изображения различных точек объекта попадают на различные участки фазового фильтра и тем самым приобретают фазовые различия между собой. Будем рассматривать этот элемент как преобразователь начального волнового поля $E(x, 0)$ в выходящее волновое поле $E(x, 4F)$. При отсутствии фазового фильтра, т. е. $\varepsilon=0$, очевидно, что $E(x, 4F) = -E(-x, 0)$, т. е. выходящий волновой фронт подобен входящему (с точностью до знака при x), и такой преобразователь можно считать тождественным.

Вычислим поле $E(x, 4F)$ при прежних предположениях о входном зрачке и фазовом фильтре $\Phi_1(x, 2F)$.

При выбранном геометрическом расположении элементов преобразователя II имеем аналогично (2)

$$E(x, 4F) = E_s\left(\frac{k}{F}x, 2F\right),$$

т. е.

$$E(x, 4F) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} E^+(y, 2F) \exp\left\{ik \frac{x}{F} y\right\} dy,$$

где C_1 — масштабный коэффициент, $E^+(y, 2F)$ — поле в плоскости $z = 2F$ после фильтра $\Phi_1(y, 2F)$, т. е.

$$E^+(y, 2F) = G \exp\left\{-\frac{k^2 u^2}{4} [y - (\alpha + \theta) F]^2\right\} \exp\{i\varepsilon(y + \gamma)^2\},$$

$$E(x, 4F) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k^2 u^2}{4} [y - (\alpha + \theta) F]^2\right\} \exp\left\{i\varepsilon(y + \gamma)^2 + ik \frac{x}{F} y\right\} dy.$$

Интегрируя [7], получаем после элементарных преобразований

$$E(x, 4F) = \frac{C'}{\sqrt{k^2 u^2 - i4\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{k^4 u^2}{F^2(k^4 u^4 + 16\varepsilon^2)}(x - x_0)^2 - i4\varepsilon \frac{k^2}{F^2(k^4 u^4 + 16\varepsilon^2)}(x - x_0)^2\right\} \exp\{-ik\alpha x\} \exp\{i\varepsilon F^2(\alpha + \theta)^2 + i\varepsilon\gamma^2 + i2\varepsilon\gamma F(\alpha + \theta)\},$$

где

$$x_0 = +2 \frac{\varepsilon}{k} F^2(\alpha + \theta) + 2\varepsilon\gamma \frac{F}{k}.$$

Преобразованное поле $E(x, 4F)$ существенно отличается от начального. Во-первых, происходит расширение области задания поля; во-вторых, положение центра преобразованного поля зависит от параметров фильтра $\Phi_1(x, 2F)$ и от угла α ; в-третьих, в выражении $E(x, 4F)$ появляется линейный фазовый множитель, зависящий от α . Эта фазовая информация выявляется в интерферометрической схеме и обеспечивает, как было показано выше в п. 3, превышение классического предела разрешения.

Таким образом, можно сказать, что рассмотренный выше преобразователь волнового поля обладает активными свойствами по разрешению пространственной структуры некогерентного удаленного объекта.

Интересно отметить, что если после активного преобразователя расположить традиционную оптическую систему (объектив без интерферометрической схемы), то все дополнительные отличия поля $E(x, 4F)$ от начального $E(x, 0)$ не будут выявлены, и в фокальной плоскости этого объектива будет построено обычное изображение объекта с пределом разрешения, определяемым дифракцией на входном зрачке.

Литература

- [1] D. Francia, G. Toraldo. Nuovo Cimento, Suppl., 9, 426, 1952.
- [2] T. L. Harris. J. Opt. Soc. Am., 54, 931, 1964.
- [3] P. Lacombe. Opt. Acta, 1, 33, 1954.
- [4] A. Lohmann, D. Paris. Optik, 22, 226, 1965.
- [5] Р. Струок. Введение в когерентную оптику и голографию. М., 1971.
- [6] А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. Изд. «Мир», М., 1971.
- [7] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступило в Редакцию 29 декабря 1971 г.