

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЗОННОЙ ПЛАСТИНКИ ФРЕНЕЛЯ

А. Л. Дмитриев

Приводятся результаты расчета на ЭЦВМ основных свойств зонной пластинки Френеля с синусоидальным распределением прозрачности в зависимости от числа имеющихся зон. Рассмотрены вопросы линейной разрешающей способности в продольном и поперечном направлениях в окрестности главного фокуса зонной пластинки, а также условия появления кратных фокусов. Обращает на себя внимание эффект регулярного смещения положения главного фокуса при небольшом ($N \leq 20$) числе зон.

Известно, что зонная пластинка Френеля является хорошей моделью габоровской голограммы точечного объекта [1]. Поэтому часто основные свойства голограмм, такие как достижимая с их помощью разрешающая способность, трактуются на основе этой модели. Однако в ряде случаев подобное приближение, при котором зонная пластинка Френеля пред-

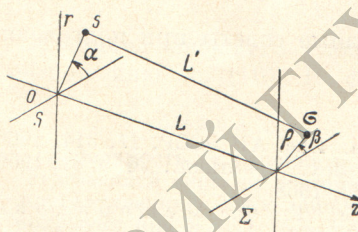


Рис. 1. Геометрические соотношения при действии зонной пластинки.

ставляет обычно в виде ступенчатого «черно-белого» раstra, оказывается недостаточным. Более точной моделью габоровской голограммы точки должна быть зонная пластинка, пропускание которой соответствует интерференционной картине при взаимодействии плоской и сферической волн с плавным изменением интенсивности суммарного поля. Подобная голограмма может рассматриваться и как элементарный сигнал при представлении реальных голограмм с помощью преобразования Френеля [2]. Ниже приводится расчет основных свойств синусоидальных зонных пластинок.

Пусть в плоскости S (рис. 1) интерферируют две когерентные волны — плоская с амплитудой A и начальной фазой φ_0 , и сферическая с радиусом кривизны L и нулевой начальной фазой (считаем амплитуды обеих волн равными). Интенсивность $\varphi(s)$ поля в некоторой s -й точке интерференционной картины в парааксиальном ($r^2/L^2 \ll 1$) приближении описывается, как можно показать, выражением

$$\varphi(s) = 2A^2 \left[1 + \cos \left(\frac{kr^2}{2L} + \delta \right) \right], \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, r — полярная координата в плоскости S и $\delta = kL - \varphi_0$. Значение $\delta = \pm 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ соответствует положительной зонной пластинке и $\delta = \pm \pi, 3\pi, \dots$ — отрицательной. Мы допускаем, что выражение (1) с точностью до постоянного комплексного множителя описывает амплитудный коэффициент пропускания простейшей двумерной голограммы точки при идеальных условиях записи на фотоэмульсии.

При падении на зонную пластинку S плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси z на рис. 1 (процесс реконструкции изображения точки), поле за пластинкой определяется дифракцион-

ным интегралом Френеля. Опуская, как и везде ниже, несущественный для настоящего анализа комплексный коэффициент перед знаком интеграла, запишем выражение для амплитуды $\psi(\sigma)$ поля в фокальной ($z=L$) плоскости Σ зонной пластинки

$$\psi(\sigma) = \int_{(S)} \varphi(s) e^{-ik\Delta L} ds, \quad (2)$$

(в скалярном и параксиальном приближении), где $ds = r dr d\alpha$, а $\Delta L \equiv L' - L$, согласно геометрии рис. 1, равно

$$\Delta L \simeq \frac{r^2}{2L} + \frac{\rho^2}{2L} - \frac{r\rho}{L} \cos(\alpha - \beta). \quad (3)$$

После подстановки (1) и (3) в (2) и выполнении интегрирования по α выражение для $\psi(\sigma)$ приводится (с точностью до коэффициента) к виду

$$\psi(\sigma) = \int_0^{r_0} \left[1 + \cos\left(\frac{kr^2}{2L} + \delta\right) \right] e^{-i\frac{kr^2}{2L}} J_0\left(\frac{k\rho r}{L}\right) r dr, \quad (4)$$

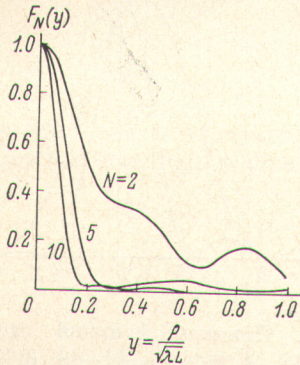


Рис. 2. Вид функции распределения $F_N(y)$ при $N=2, 5, 10$ для положительной ($\delta=0$) зонной пластинки.

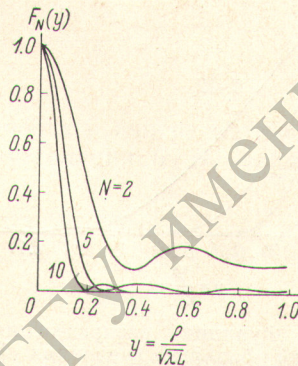


Рис. 3. Вид функции распределения $F_N(y)$ при $N=2, 5, 10$ для отрицательной ($\delta=\pi$) зонной пластинки.

где r_0 — радиус зонной пластинки, а J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Определяя по аналогии с растровой зонной пластинкой число N зон Френеля по формуле

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda L} \quad (5)$$

и вводя безразмерный параметр y

$$y = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda L}}, \quad (6)$$

формулу (4) можно записать в виде

$$\psi(\sigma) \sim \psi_N(y) = \int_0^N [1 + \cos(\pi x + \delta)] e^{-i\pi x} J_0(2\pi\sqrt{x}y) dx, \quad (7)$$

где $x \equiv r^2/\lambda L$.

Для нахождения нормированной функции распределения интенсивности света $F_N(y)$ в фокальной плоскости Σ следует вычислить отношение

$$F_N(y) = \frac{|\psi_N(y)|^2}{|\psi_N(0)|^2}. \quad (8)$$

При этом главную трудность представляет расчет интегралов вида (7) или (4), которые обычно выражаются через функции Ломмеля [3].

В настоящей работе вычисление интегралов производилось с помощью ЭЦВМ непосредственно методом Симпсона с числом разбиений отрезка интегрирования 10^4 , что гарантировало точность расчета в третьем—четвертом знаке.

Результаты вычислений функции $F_N(y)$ при разных фиксированных значениях N представлены на рис. 2—4. Можно видеть, что различия в линейной разрешающей способности у положительной и отрицательной зонных пластинок практически исчезают, если число зон N превосходит $10 \div 15$. С другой стороны, становится объяснимым несколько необычный результат работы [4], из которой следует, что линейная (угловая) разрешающая способность отрицательной зонной пластинки всегда и особенно при малом числе зон выше, чем у положительной. Авторы [4] рассматривали растровую зонную пластинку, для которой вычисление функций ана-

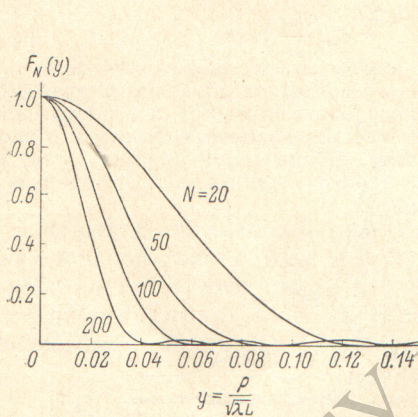


Рис. 4. Функция распределения $F_N(y)$ при больших значениях N (одинакова для положительной и отрицательной зонных пластинок).

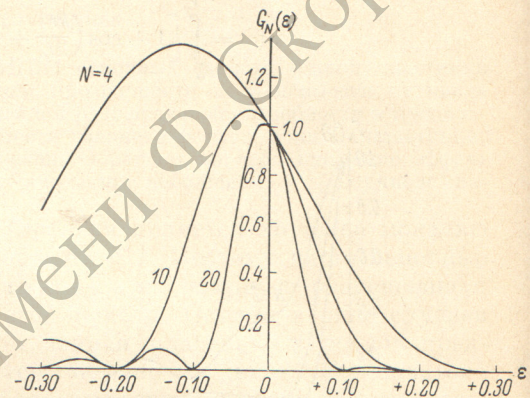


Рис. 5. Примеры функций распределения $G_N(\epsilon)$ при $N = 4, 10, 20$ для положительной зонной пластинки.

логичных (7) сводилось к простому суммированию конечного ряда по функциям Бесселя, а расчет разрешающей способности производился на основе правила Релея (по положению первого минимума радиальной функции распределения). Сложный характер кривых на рис. 2, 3 при малых индексах N показывает, что в этих условиях критерий Релея не может быть строго применим при оценке величины провала перекрывающихся функций вида $F_N(y)$; однако это правило становится справедливым при достаточно большом числе зон (рис. 4). Интересно отметить, что несмотря на различия в виде кривых на рис. 2, 3, удвоенная ширина $2y_0$ кривой $F_N(y)$ на уровне 0.8 хорошо описывается формулой

$$2y_0 \approx \frac{0.30}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

для положительной и отрицательной зонных пластинок и при любом числе зон N , что при подстановках (5) и (6) дает

$$\Delta_{\perp} \approx 0.60 \frac{\lambda L}{D}, \quad (10)$$

где $\Delta_{\perp} \equiv 2\rho_0$ есть ширина главного максимума в фокусе на уровне 0.8, а $D \equiv 2r_0$ — диаметр зонной пластинки. Очевидно, что формула (10) с точностью до коэффициента соответствует известному выражению для линейной разрешающей способности линзы диаметра D , определенной по критерию Релея.

Для решения вопроса о продольной разрешающей способности зонной пластинки рассмотрим поведение функции распределения интенсивности поля G в окрестности главного фокуса вдоль оси z при $\rho=0$ (рис. 1). Вид этой функции нетрудно определить из выражения для интеграла Френеля (4), если в показателе экспоненты под знаком интеграла произвести замену величины L на $L' = L(1+\varepsilon)$, где безразмерный параметр ε означает сдвиг точки наблюдения относительно положения математического фокуса ($z=L$).

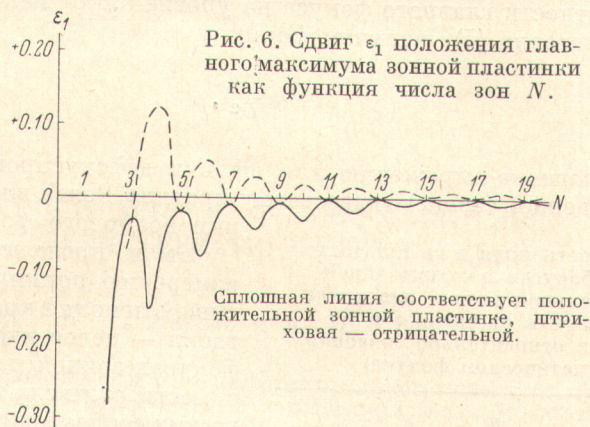


Рис. 6. Сдвиг ε_1 положения главного максимума зонной пластинки как функция числа зон N .

Нормированная к значению интенсивности в центре математического фокуса зонной пластинки функция распределения $G_N(\varepsilon)$ запишется

$$G_N(\varepsilon) = \frac{\left| \int_0^N [1 + \cos(\pi x + \delta)] e^{-i\pi x(1-\varepsilon)} dx \right|^2}{\left| \int_0^N [1 + \cos(\pi x + \delta)] e^{-i\pi x} dx \right|^2} \quad (11)$$

После выполнения интегрирования в (11) расчет функции $G_N(\varepsilon)$ по громоздким тригонометрическим выражениям был проделан с помощью



Рис. 7. Изменение ширины $2\varepsilon_0$ функции $G_N(\varepsilon)$ на уровне 0.8 от максимального значения в зависимости от числа зон N .

Сплошная линия — для положительной зонной пластинки, штриховая — для отрицательной.

ЭЦВМ. На рис. 5 приведены примеры функций распределения $G_N(\varepsilon)$ для положительной ($\delta=0$) зонной пластинки при трех значениях N (кривая $G_N(\varepsilon)$ на периферии промежутка $\varepsilon=(-0.30 \div +0.30)$ несколько деформированна, так как здесь $(1+\varepsilon)^{-1} \approx (1-\varepsilon)$). Тот факт, что при малых N функция $G_N(\varepsilon)$ превосходит единицу, объясняется условием нормировки и есть следствие явления сдвига действительного положения главного фокуса относительно $z=L$. Расчеты показывают, что для положительной зонной пластинки положение максимума функции распределения G сдвинуто относительно математического фокуса в среднем ближе к ее поверхности и для отрицательной — дальше. Этот эффект сравнительно сильно выражен при небольшом ($N \leq 20$) числе зон; на рис. 6 представлена зависимость сдвига ε_1 положения главного фокуса зонной пластинки как функции N , построенная по данным совокупности кривых вида рис. 5.

Рис. 7 показывает ход изменения ширины $2\varepsilon_0$ кривых $G_N(\varepsilon)$, измеренной на уровне 0.8 от максимального значения. Если усреднить данные по $2\varepsilon_0$

для положительной и отрицательной данных пластинок, то результирующая кривая $\overline{2\varepsilon_0}$ хорошо описывается формулой

$$\overline{2\varepsilon_0} \approx N^{-1}, \quad (12)$$

которую можно считать точной при $N \geq 10$. Заменяя в (12) $\overline{2\varepsilon_0}$ на $\Delta_{||}/L$, где $\Delta_{||}$ — ширина функции продольного распределения интенсивности поля в окрестности главного фокуса на уровне 0.8 от максимального значения, и подставив (5), получим формулу

$$\Delta_{||} \approx 4 \frac{\lambda L^2}{D^2}, \quad (13)$$

которая аналогична выражению для ошибки дефокусировки линзы диаметра D , найденной согласно известному правилу Релея для малой аберрации волнового фронта [5].

Интенсивность поля в m -кратных ($m > 1$) фокусах положительной или отрицательной зонной пластинки в зависимости от числа зон N (в процентах относительно значения в математическом фокусе)

N	m					
	2	3	4	5	6	7
3	6.78	1.69	1.08	0.61	0.45	0.31
5	2.71	0.68	0.43	0.24	0.18	0.12
7	1.42	0.35	0.23	0.13	0.09	0.06
9	0.87	0.22	0.14	0.08	0.06	0.04

Были проделаны расчеты по измерению нормированной интенсивности поля в кратных ($L' = L/m$, где m — целое или дробное число) фокусах зонной пластинки в зависимости от числа зон N . Из физических соображений очевидно, что синусоидальная зонная пластинка значительно отличается в этих свойствах от растровой. Действительно, расчет показывает, что для положительной и отрицательной зонных пластинок при любом четном N кратные ($m > 1$) фокусы полностью отсутствуют. Однако

при нечетном числе зон N существуют слабо выраженные кратные фокусы, интенсивность в которых быстро падает с увеличением N . В таблице приведены значения интенсивности поля в m -кратных фокусах в процентах относительно значения в математическом ($m=1$) фокусе зонной пластинки. За фокальной плоскостью ($m=1/2, 1/3, 1/4, \dots$) при малом числе зон ($N \sim 2, 3, 4$) интенсивность поля на большем удалении от главного фокуса ($m \sim 1/4$) может превосходить интенсивность в математическом фокусе в 1.5–3 раза, но начиная с $N \sim (7 \div 8)$ становится, как и для остальных значений m , не больше 8% от значения в математическом фокусе и заметно падает с увеличением N . Свойства положительных и отрицательных синусоидальных зонных пластинок в этом последнем случае близки друг к другу.

Автор выражает признательность В. Д. Яровой за большую помощь в составлении программ для ЭЦВМ.

Литература

- [1] G. L. Rogers. Nature, 166, 237, 1950.
- [2] Л. Мерц. Интегральные преобразования в оптике. Изд. «Мир», М., 1969.
- [3] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Изд. «Наука», М., 1970.
- [4] D. J. Stigliani, R. Mitra, R. G. Semonin. J. Opt. Soc. Am., 57, 610, 1967.
- [5] А. Маршалль, М. Франсон. Структура оптического изображения. Изд. «Мир», М., 1964.

Поступило в Редакцию 9 февраля 1972 г.