УДК 535.417

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ БЕЗ ОПОРНОЙ ВОЛНЫ

Ш. Д. Какичашвили

Теоретически рассматривается возможность голографической записи без специально формируемой опорной волны. Подобная запись принципиально возможна, если пространственную регистрацию поля объекта проводить за промежуток времени, соизмеримый с периодом волнового колебания. Реконструкция с подобной голограммы дает изображение объекта с определенным образом трансформированными продольным и поперечным масштабами.

В существующих способах голографической записи используется когерентная опорная волна, позволяющая однозначно фиксировать и воспроизводить рассеянное объектом поле [1-4].

Определенный интерес может представить возможность записи без использования опорной волны, путем регистрации лишь волнового возмущения, вызванного объектом. Подобная возможность появляется, если регистрацию поля объекта проводить за сравнимый с периодом колебания промежуток времени, в течение которого реакция детектора не успевает полностью усредниться по поверхности. Осуществление такой схемы в акустической голографии, очевидно, не представляет какой-либо сложности [5]. Для электромагнитных волн при допущении принципиальной возможности аналогичной записи будет, однако, иметь место неопределенность, вызванная однозначным характером реакции детектора на величину амплитуды независимо от ее знака. Как будет показано в данной статье, это не приводит к необратимой потере информации и зафиксированная таким путем картина, в принципе, позволяет голографически воссоздать изображение объекта.

Рассмотрим установившееся поле монохроматического излучения, сформированное удаленным объектом S_0. На поверхности детектора S, установленного в плоскости $z=0$, поле имеет вид [6]

$$\xi(x,\ y,\ t) \approx \frac{i\varkappa \cos\theta_0}{2\pi R_0} \int\limits_{S_0} \xi(x_0,\ y_0,\ z_0) \exp i\,[\omega t - \varkappa R(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y)]\, ds_0, \qquad (1)$$

где x, y — координаты по поверхности S; x_0, y_0, z_0 — координаты по объекту S_0; θ — угол между нормалью к S и прямой, направленной к точке объекта; $R(x_0, y_0, z_0, x, y)$ — расстояние от данной точки детектора до объекта.

В выражении (1) принято приближение $R \gg \lambda$, а переменные R и θ заменены соответственно постоянным R_0 и средним углом направления θ_0. Интегрирование проводится по области S_0, занятой объектом ($ds_0 = dx_0 dy_0$).

Проведем регистрацию поля в момент t_0, используя безынерционную шторку, открывающую доступ поля на поверхность детектора в течение промежутка времени Δt.

Результирующая амплитудная прозрачность детектора после регистрации равна [1]

$$T(x,\ y) = kW^{\gamma/2}, \qquad (2)$$

где k — коэффициент пропорциональности; γ — контрастная характеристика детектора; W — суммарная энергия, поступившая на детектор за Δt. Последняя величина может быть выражена в виде [7]

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}|\operatorname{Re}\xi(x,\ y,\ t)|^2\,dt=\frac{\varkappa^2\cos^2\theta_0\Delta t}{64\pi^3R_0^2}\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\xi(x_0',\ y_0',\ z_0)\times$$

$$\times\{\cos[\varkappa R(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y)-\varkappa R(x_0',\ y_0',\ z_0,\ x,\ y)]-$$

$$-\varepsilon\cos[\varkappa R(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y)+\varkappa R(x_0',\ y_0',\ z_0,\ x,\ y)-\varphi]\}\,ds_0'ds_0. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon=\sin\omega\Delta t/\omega\Delta\tau$, $\varphi=\omega(2t_0+\Delta t)$.

Дальнейший анализ полученного выражения значительно упрощается для малых значений ε. В этом случае, подставляя (3) в (2), приближенно получаем

$$T(x,\ y)\approx k\left(\frac{\varkappa\cos\theta_0}{8\pi R_0}\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}}\right)^{\gamma}\left\{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\left[\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,ds_0\right]^{\gamma}+\right.$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left[\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,ds_0\right]^{\gamma-2}\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\xi(x_0',\ y_0',\ z_0)\cos[\varkappa R(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y)-$$

$$-\varkappa R(x_0',\ y_0',\ z_0,\ x,\ y)]\,ds_0'ds_0-\frac{\varepsilon\gamma}{2}\left[\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,ds_0\right]^{\gamma-2}\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\times$$

$$\left.\times\,\xi(x_0',\ y_0',\ z_0)\cos[\varkappa R(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y)+\varkappa R(x_0',\ y_0',\ z_0,\ x,\ y)-\varphi]\,ds_0'ds_0\right\}. \tag{4}$$

Если полученную прозрачность (4) просветить плоской монохроматической волной частоты ω', падающей нормально, то в принятом выше приближении для дифрагированного поля получим

$$\xi'(x',\ y',\ z',\ t)\approx\frac{i\varkappa'\cos\theta_0'}{2\pi R_0'}\int\limits_{S}T(x,\ y)\exp i\,[\omega't-\varkappa'R'(x',\ y',\ z',\ x,\ y)]\,ds, \tag{5}$$

где $R'(x',\ y',\ z',\ x,\ y)$ — расстояние от данной точки прозрачности до удаленной точки наблюдения x', y', z'. Здесь переменные R' и θ' заменены соответственно постоянным R_0' и средним углом направления θ_0'. Интегрирование проводится по области S, занятой прозрачностью ($ds=dxdy$).

Воспользуемся приближенным представлением R и R', справедливым для удаленного объекта и удаленной точки наблюдения

$$\begin{aligned}R(x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y)&\approx-z_0-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z_0},\\ R'(x',\ y',\ z',\ x,\ y)&\approx z'+\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z'}.\end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (4) и (6) в (5) при достаточной протяженности областей интегрирования S_0 и S получим

$$\xi'(x',\ y',\ z',\ t)\approx\frac{ik\varkappa'\cos\theta_0'}{2\pi R_0'}\left(\frac{\varkappa\cos\theta_0}{8\pi R_0}\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}}\right)^{\gamma}\exp i\omega't\left\{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\times\right.$$

$$\times\left[\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,ds_0\right]^{\gamma}\exp-i\varkappa'\left(z'+\frac{x'^2+y'^2}{2z'}\right)\int\limits_{S}\exp-i\varkappa'\left(\frac{x^2+y^2}{2z'}-\right.$$

$$\left.-\frac{xx'+yy'}{z'}\right)ds+\frac{\gamma}{2}\left[\int\limits_{S_0}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,ds_0\right]^{\gamma-2}\exp-i\varkappa'\left(z'+\frac{x'^2+y'^2}{2z'}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\int\limits_{S}\xi(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\xi(x_0',\ y_0',\ z_0)\exp-i\left\{\frac{\varkappa'}{2z'}(x^2+y^2)-\frac{\varkappa}{z_0}\left(\frac{\varkappa'z_0}{\varkappa z'}x'-x_0+x_0'\right)x-\right.$$

$$-\frac{\varkappa}{z_0}\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'} y' - y_0 + y_0'\right) y - \frac{\varkappa}{2z_0}\left[(x_0^2 - x_0'^2) + (y_0^2 - y_0'^2)\right]\Big\} ds\, ds_0'\, ds_0 -$$

$$-\frac{\varepsilon\gamma}{4}\left[\int_{S_0} \xi\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\, ds_0\right]^{\gamma-2} \exp i\left[2\varkappa z_0 - \varkappa' z' - \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{2z'} + \varphi\right]\times$$

$$\times \int_{S_0}\int_{S_0}\int_{S} \xi\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\, \xi\,(x_0',\, y_0',\, z_0) \exp i\Big\{\left(\frac{\varkappa}{z_0}-\frac{\varkappa'}{2z'}\right)(x^2+y^2) + \frac{\varkappa}{z_0}\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}x' - x_0 - x_0'\right)x +$$

$$+\frac{\varkappa}{z_0}\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}y' - y_0 - y_0'\right)y + \frac{\varkappa}{2z_0}\left[(x_0^2+x_0'^2)+(y_0^2+y_0'^2)\right]\Big\} ds\, ds_0'\, ds_0 -$$

$$-\frac{\varepsilon\gamma}{4}\left[\int_{S_0} \xi\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\, ds_0\right]^{\gamma-2} \exp - i\left[2\varkappa z_0 + \varkappa' z' + \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{2z'} + \varphi\right]\times$$

$$\times \int_{S_0}\int_{S_0}\int_{S} \xi\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\, \xi\,(x_0',\, y_0',\, z_0) \exp - i\Big\{\left(\frac{\varkappa}{z_0}+\frac{\varkappa'}{2z'}\right)(x^2+y^2) -$$

$$-\frac{\varkappa}{z_0}\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}x' + x_0 + x_0'\right)x - \frac{\varkappa}{z_0}\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}y' + y_0 + y_0'\right)y +$$

$$+\frac{\varkappa}{2z_0}\left[(x_0^2+x_0'^2)+(y_0^2+y_0'^2)\right]\Big\} ds\, ds_0'\, ds_0\Big\}. \qquad (7)$$

Обозначим последовательность членов выражения (7) через ξ_1', ξ_2', ξ_3', ξ_4'. В первом члене разложения информация об объекте не содержится. Это фактически прошедший без дифракции нулевой пучок. Переходя к асимптотическому приближению, имеем

$$\xi_1' \approx k \cos^2\theta_0' \left(\frac{\varkappa \cos\theta_0}{8\pi R_0}\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\left[\int_{S_0}\xi\,(x_0,\, y,\, z_0)\, ds_0\right]^{\gamma} \exp i\,(\omega' t - \varkappa' z'). \qquad (8)$$

В том же приближении для второго члена имеем

$$\xi_2' \approx A \exp i\left[\omega' t - \varkappa' z' - \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{2z'}\right]\int_{S_0}\int_{S_0}\xi\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\,\xi\,(x_0',\, y_0',\, z_0)\times$$

$$\times \exp\frac{i\varkappa}{2z_0}\left[(x_0^2-x_0'^2)+(y_0^2-y_0'^2)\right]\exp i\frac{\varkappa^2 z'}{2\varkappa' z_0^2}\left[\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}x' - x_0 + x_0'\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}y' - y_0 + y_0'\right)^2\right] ds_0'\, ds_0 \approx A \exp i\left[\omega' t - \varkappa' z' - \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{2z'}\right]\times$$

$$\times\Big\{\xi\left(\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}x',\ \frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}y',\ z_0\right)\exp i\frac{\varkappa'^2 z_0}{2\varkappa z'^2}(x'^2+y'^2)\otimes\otimes\,\xi\left(-\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}x',\ -\frac{\varkappa' z_0}{\varkappa z'}y',\ z_0\right)\times$$

$$\times \exp - i\frac{\varkappa'^2 z_0}{2\varkappa z'^2}(x'^2+y'^2)\otimes\otimes \exp i\frac{\varkappa'}{2z'}(x'^2+y'^2)\Big\}, \qquad (9)$$

где

$$A = \frac{k\gamma}{2}\cos^2\theta_0'\left(\frac{\varkappa\cos\theta_0}{8\pi R_0}\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}}\right)^{\gamma}\left[\int_{S_0}\xi\,(x_0,\, y_0,\, z_0)\, ds_0\right]^{\gamma-2}.$$

Полученная кратная свертка при условии $\varkappa' z_0/\varkappa z' = 1$ занимает пространственный интервал примерно в два раза больше самого объекта. При этом квадратичный член в экспоненциальном множителе аппроксимирует сферическую волну с центром на расстоянии $z' = (\varkappa/\varkappa')\, z_0$.

Для третьего члена при выполнении условия

$$\frac{\varkappa' z_0}{2\varkappa z'} = 1 \qquad (10)$$

внутренний интеграл превращается в двумерную δ-функцию. Используя, кроме того, вытекающее из (10) соотношение

$$\cos\theta_0' = \frac{\cos\theta_0}{\sqrt{1+\left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'^2}-1\right)\sin^2\theta_0}}, \tag{11}$$

имеем

$$\xi_3' \approx B \exp i\left[\omega' t + \left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'} - \varkappa'\right)z' - \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{2z'} + \varphi\right] \times$$

$$\times \int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0} \xi\left(x_0, y_0, \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)\xi\left(x_0', y_0', \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)\exp i\frac{\varkappa'}{4z'}\left[(x_0^2+x_0'^2)+(y_0^2+y_0'^2)\right]\times$$

$$\times \delta(2x'-x_0-x_0', 2y'-y_0-y_0')\,ds_0'ds_0 \approx B\exp i\left[\omega' t + \left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'}-\varkappa'\right)z' -\right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{2z'}\right]\left\{\xi\left(2x', 2y', \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)\times\right.$$

$$\left.\times \exp i\frac{\varkappa'}{z'}(x'^2+y'^2)\otimes\otimes\,\xi\left(2x', 2y', \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)\exp i\frac{\varkappa'}{z'}(x'^2+y'^2)\right\}, \tag{12}$$

где

$$B = -\frac{2\pi i k\gamma\varepsilon\cos^2\theta_0 z'}{\varkappa'\left[1+\left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'^2}-1\right)\sin^2\theta_0\right]}\left(\frac{\varkappa'\cos^2\theta_0}{16\pi z'}\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}}\right)^{\gamma}\left[\int\limits_{S_0}\xi\left(x_0, y_0, \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)ds_0\right]^{\gamma-2}.$$

Для низкоконтрастного объекта с ограниченным пространственным спектром, не имеющего резких скачков амплитуды по поверхности, полученная двумерная свертка с достаточной точностью может быть заменена ее нулевым приближением [8]

$$\xi_3' \approx B\int\limits_{S_0}\xi\left(x_0, y_0, \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)\exp i\frac{\varkappa'}{4z'}(x_0^2+y_0^2)\,ds_0\exp i\left[\omega' t + \left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'}-\varkappa'\right)z' +\right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{z'} + \varphi\right]\xi\left(2x', 2y', \frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right). \tag{13}$$

Из (13) следует, что в принятом приближении ξ_3' модулировано по амплитуде подобно полю объекта с двукратным уменьшением поперечного масштаба. Продольный масштаб трансформирован согласно (10). Линейный член в экспоненте описывает связанный с этим дополнительный сдвиг фазы. Квадратичный член в экспоненте описывает не имеющее принципиального значения фазовое искривление реконструированной волны. Таким образом, ξ_3' описывает мнимое изображение объекта с трансформированным продольным и поперечным масштабами.

Поступая аналогично для четвертого члена (7), при выполнении условия

$$\frac{\varkappa' z_0}{2\varkappa z'} = -1 \tag{14}$$

и вытекающего из него

$$\cos\theta_0' = -\frac{\cos\theta_0}{\sqrt{1+\left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'^2}-1\right)\sin^2\theta_0}}, \tag{15}$$

имеем

$$\xi_4' \approx c\int\limits_{S_0}\xi\left(x_0, y_0, -\frac{2\varkappa}{\varkappa'}z'\right)\exp i\frac{\varkappa'}{4z'}(x_0^2+y_0^2)\,ds_0\exp i\left[\omega' t + \left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'}-\varkappa'\right)z' +\right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa'(x'^2+y'^2)}{z'} - \varphi\right]\xi\left(2x', 2y', -\frac{2\varkappa}{\varkappa'}z\right), \tag{16}$$

где

$$c = -\frac{2\pi i k \gamma \varepsilon \cos^2 \theta_0 z'}{\varkappa' \left[1 + \left(\frac{4\varkappa^2}{\varkappa'^2} - 1\right) \sin^2 \theta_0\right]} \left(-\frac{\varkappa' \cos^2 \theta_0}{16\pi z'} \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}}\right)^\gamma \left[\int\limits_{S_0} \xi\left(x_0,\, y_0,\, -\frac{2\varkappa}{\varkappa'} z'\right) ds_0\right]^{\gamma-2}.$$

Выражение (16) описывает реконструированное действительное изображение объекта с соответствующим образом трансформированным масштабом, сформированное симметрично мнимому.

В общем случае исходного объекта произвольного контраста искажения реконструированного таким путем изображения аналогичны амплитудным и фазовым искажениям, присущим изображению второго порядка [9, 10].

Следует отметить, что использование несимметричного фрагмента подобной голограммы позволит аналогично известной схеме с опорным пучком [11] пространственно отделить реконструированное изображение от нулевой и описанной соотношением (9) компонент.

Литература

[1] D. Gabor. Proc. Roy. Soc., *A197*, 454, 1949.
[2] Ю. Н. Денисюк. ДАН СССР, *144*, 1275, 1962.
[3] P. Greguss. J. Phot. Sci., *14*, 329, 1966.
[4] R. P. Dooley. Proc. IEEE, *53*, 1733, 1965.
[5] В. А. Зверев, А. М. Павленко, Г. А. Шаронов. Опт. и спектр. *30*, 1157, 1971.
[6] A. Sommerfeld. Optics, Acad. Press, New York, p. 201, 1954.
[7] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, 58. Изд. «Наука». М., 1970.
[8] А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. Изд. «Мир», М., 1971.
[9] A. Kozma. J. Opt. Soc. Am., *56*, 428, 1966.
[10] Дж. Гудмен. Введение в Фурье-оптику, 312. Изд. «Мир», 1970.
[11] E. N. Leith, J. Upatnieks. J. Opt. Soc. Am., *52*, 1123, 1962.

Поступило в Редакцию 22 апреля 1968 г.