

ЭФФЕКТ ФАРАДЕЯ В КУБИЧЕСКИХ ФЕРРИМАГНЕТИКАХ С МАГНИТНЫМ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕМ

Ф. В. Лисовский

Рассмотрен эффект Фарадея в кубических ферримагнетиках с учетом магнитооптических коэффициентов первого и второго порядка. Показано, что «классический» эффект Фарадея на циркулярно поляризованных волнах имеет место лишь в тех случаях, когда намагниченность и волновой вектор света направлены вдоль осей [001] или [111]. При распространении света вдоль намагниченности по любым другим направлениям собственные волны эллиптически поляризованы и эффект Фарадея существенно видоизменяется: в частности, он становится анизотропным, а угол поворота плоскости поляризации связан с длиной кристалла нелинейной зависимостью.

Эффект Фарадея в магнитных кристаллах с естественным двулучепреломлением неоднократно исследовался рядом авторов [1, 2]. Представляет интерес также исследование эффекта Фарадея в кубических магнитных кристаллах, в которых естественное двулучепреломление отсутствует, но существует «магнитное» двулучепреломление, индуцированное спонтанной намагниченностью [3, 4]. В этих случаях следует ожидать анизотропии эффекта Фарадея, т. е. зависимости угла поворота плоскости поляризации от ориентации волнового вектора (параллельного вектору намагниченности) относительно кристаллографических осей. Поскольку в некоторых магнитных кубических кристаллах, в частности в некоторых ферритах-гранатах, магнитное двулучепреломление сравнимо по порядку величины с фарадеевым вращением (если сравнивать разности фаз, приобретаемые нормальными волнами в том и другом случае на одной и той же длине кристалла) [5], то вопрос о влиянии квадратичной магнитооптической связи на «линейный» эффект Фарадея имеет значение и для практических исследований.

1. Постановка задачи и вывод дисперсионного соотношения для нормальных волн

Тензор диэлектрической проницаемости для ферримагнетика с коллинеарными подрешетками может быть записан в виде

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \alpha_{ijk} m_k + \beta_{ijkl} m_k m_l + \dots, \quad (1)$$

где ϵ_{ij}^0 — диэлектрическая проницаемость в отсутствие намагниченности; α_{ijk} — тензор 3-го ранга, описывающий линейную магнитооптическую связь; β_{ijkl} — тензор 4-го ранга, описывающий квадратичную магнитооптическую связь; $\mathbf{m} = \sum_{\nu} \mathbf{M}_{\nu} / \sum_{\nu} M_{\nu}$; M_{ν} — намагниченность ν -й подрешетки. Для кубических кристаллов, используя обобщенный принцип симметрии в присутствии намагниченности и эрмитовость тензора ϵ_{ij} для сред без потерь [6], получаем

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon + \beta_1 m_1^2 & i\alpha m_3 + \beta_2 m_1 m_2 & -i\alpha m_2 + \beta_2 m_1 m_3 \\ -i\alpha m_3 + \beta_2 m_1 m_2 & \epsilon + \beta_1 m_2^2 & i\alpha m_1 + \beta_2 m_2 m_3 \\ i\alpha m_2 + \beta_2 m_1 m_3 & -i\alpha m_1 + \beta_2 m_2 m_3 & \epsilon + \beta_1 m_3^2 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \varepsilon^0 + \beta$, ε^0 — диэлектрическая проницаемость кубического кристалла в отсутствие намагниченности, α — линейный магнитооптический коэффициент (определяющий при $\beta_i = 0$ «классическое» фарадеево вращение), β , β_1 и β_2 — квадратичные магнитооптические коэффициенты (описывающие при $\alpha = 0$ и при распространении света перпендикулярно намагниченности магнитное двулучепреломление).

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в среде с тензором ε_{ij} вида (2) вдоль направления спонтанной намагниченности, которая может иметь произвольную ориентацию относительно кристаллографических осей. Известно [7], что из уравнений Максвелла при $\mu = 1^1$ непосредственно следует соотношение

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = \tilde{n}^2 [\mathbf{E} - \mathbf{m} (\mathbf{mE})], \quad (3)$$

где \mathbf{D} — вектор электрической индукции, \mathbf{E} — напряженность электрического поля волны, $\tilde{n} = kc/\omega$ — комплексный показатель преломления, \mathbf{k} — комплексное волновое число, $\mathbf{m} = \mathbf{k}/k$, ω — круговая частота волны, c — скорость света в вакууме. Из (3) находим, что

$$[\varepsilon_{ij} + \tilde{n}^2 (m_i m_j - \delta_{ij})] E_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Хотя дисперсионное соотношение и нормальные волны могут быть найдены непосредственно из (4), однако дальнейший анализ удобнее выполнять в системе координат, в которой намагниченность направлена по одной из координатных осей [скажем, по z' (x'_3)], что значительно упрощает анализ поляризации нормальных волн. В соответствии с этим перейдем к эйлеровой системе координат по формулам $x'_i = a_{ik} x_k$, где a_{ik} — известные коэффициенты матрицы перехода [8]. В новой системе координат (4) с учетом (2) принимает вид²

$$E'_1 (a_{1i} \delta - i \alpha a_{2i} - \beta^- a_{1i} a_{3i}^2) + E'_2 (a_{2i} \delta + i \alpha a_{1i} - \beta^- a_{2i} a_{3i}^2) + E'_3 [(\beta_2 + \varepsilon) a_{3i} - \beta^- a_{3i}^3] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где $\delta = \varepsilon - \tilde{n}^2$, $\beta^- = \beta_2 - \beta_1$.

Вычисление детерминанта системы (5) дает следующее квадратное уравнение для нахождения δ :

$$[\delta^2 - 2A\delta + B = 0, \quad (6)$$

где

$$A = \beta^- [S + \beta^- (S(1 - 4S) + 3\Pi)/2 (\varepsilon + \beta_1 + 2S\beta^-)],$$

$$B = -\alpha^2 + \Pi (\beta^-)^2 [3 + 2\beta^- (1 - 3S)] / (\varepsilon + \beta_1 + 2S\beta^-),$$

$$S = a_{31}^2 a_{32}^2 + a_{32}^2 a_{33}^2 + a_{33}^2 a_{31}^2 = m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_3^2 m_1^2,$$

$$\Pi = a_{31}^2 a_{32}^2 a_{33}^2 = m_1^2 m_2^2 m_3^2.$$

Если считать постоянные α и β^- сравнимыми по величине, то дисперсионное соотношение (6) с точностью до членов второго порядка малости может быть записано в виде

$$\delta^2 - 2\beta^- S \delta - \alpha^2 + 3\Pi (\beta^-)^2 = 0, \quad (7)$$

а решения его имеют вид

$$\delta = \beta^- S \pm \sqrt{\alpha^2 + (\beta^-)^2 (S^2 - 3\Pi)}. \quad (8)$$

Вид решений приближенного дисперсионного уравнения наводит на мысль, что квадратичная магнитооптическая связь, описываемая константами β , β_1 и β_2 , не будет влиять на фарадеево вращение лишь в случае, если $S^2 - 3\Pi = 0$ (член $\beta^- S$ приводит лишь к одинаковому для обоих

¹ Заметим, что в магнитных средах это, естественно, может иметь место только по отношению к переменному полю электромагнитной волны.

² В (5) суммирование по индексу «i» не производится.

корней изменению величины ϵ^0). Нетрудно убедиться, что выражение $S^2 - 3\Pi$ обращается в нуль только в том случае, если намагниченность направлена по осям [001] (или [010], [100]) или [111]. Точное решение дисперсионного уравнения подтверждает это предположение.

2. Анализ поляризации нормальных волн

Подставляя в систему уравнений (5) корни дисперсионного уравнения (6) δ_1 и δ_2 , можно найти поляризацию нормальных волн. Однако в общем случае выкладки получаются довольно громоздкими, поэтому ограничимся анализом двух простых случаев.

а) Намагниченность лежит в плоскости (100). В этом случае $\psi = \pi/2$, $\varphi = -\pi/2$, откуда $S_{(100)} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$, $\Pi_{(100)} \equiv 0$, $A_{(100)} = \beta^- S_{(100)} \times (2\epsilon + \beta^+) / (\epsilon + \beta_1 + 2S_{(100)}\beta^-) \approx 2\beta^- S_{(100)}$ и $B_{(100)} = -\alpha^2$, где $\beta^+ = \beta_1 + \beta_2$ [в дальнейшем индекс (100) для упрощения записи опускаем]. Дисперсионное уравнение принимает вид

$$\delta^2 - 2A\delta - \alpha^2 = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\delta_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 + \alpha^2}. \quad (10)$$

Разрешая систему (5) при $\delta = \delta_{1,2}$, находим нормальные волны

$$E'_I \sim \{1; i\chi; \gamma\},$$

$$E'_{II} \sim \left\{1, -\frac{i}{\chi}; \gamma\right\}, \quad (11)$$

где $\chi = \alpha/\delta_1 = -\delta_2/\alpha$, $\gamma = -\beta^- \sin 4\theta/4 (\epsilon + \beta_1 + \frac{1}{2}\beta^- \sin^2 2\theta) \approx -\beta^- \sin 4\theta/4\epsilon$.

Собственные волны эллиптически поляризованы и имеют слабую продольную компоненту, которая делает их неортогональными, т. е. $E'_I E'_{II} \neq 0$. Однако для векторов электрической индукции D ортогональность³ имеет место, причем

$$D'_I \sim \{1; -i\xi; 0\},$$

$$D'_{II} \sim \left\{1; \frac{i}{\xi}; 0\right\}, \quad (12)$$

где $\xi = (\epsilon + \chi\alpha) / [(\epsilon - 2A)\chi + \alpha]$.

б) Намагниченность лежит вдоль оси [111]. При ориентации намагниченности вдоль оси [111] имеем

$$\delta^2 - \frac{2}{3}\delta\beta^- - \alpha^2 + \frac{1}{9}(\beta^-)^2 = 0, \quad (13)$$

откуда

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{3}\beta^- \pm \alpha \quad (14)$$

и

$$E'_{I,II} \sim \{1; \pm i; 0\}; D'_{I,II} \sim \{1; \pm i; 0\},$$

т. е. собственные волны имеют чисто круговую поляризацию, причем векторы $E'_{I,II}$ не имеют продольной компоненты.

3. «Эффект Фарадея» на эллиптически поляризованных нормальных волнах

Рассмотрим полубесконечную среду, ограниченную плоскостью $z' (x'_3) = 0$, в которой могут распространяться две ортогональные (по Эрмиту) эллиптически поляризованные плоские волны

$$E'_I = \{1; i\chi; 0\} \quad \text{и} \quad E'_{II} = \left\{1; -\frac{i}{\chi}; 0\right\} \quad (15)$$

³ Неортогональность собственных волн по D , однако, может иметь место при наличии пространственной дисперсии [9].

(слабой продольной компонентой поля можно пренебречь). Пусть на поверхность кристалла из полупространства $z'(x'_3) < 0$ нормально к поверхности падает плоская волна, вектор \mathbf{E} которой поляризован вдоль оси $x'(x'_1)$, совпадающей с одной из главных осей эллипса поляризации нормальных волн. Используя граничные условия на поверхности среды и считая известным закон дисперсии для нормальных волн, нетрудно убедиться, что волна в среде будет описываться следующим соотношением:

$$(E'_i)_{z'} = v_{ik} (E_k)_{z'=0} \exp[-i(k_1 + k_2)z'/2], \quad (16)$$

где k_1 и k_2 — волновые числа нормальных волн с частотой ω , а матрица Джонса v_{ik} имеет вид [10]

$$\|v_{ik}\| = \begin{vmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2} \cos \eta & -\sin \eta \sin \frac{\Phi}{2} \\ \sin \eta \sin \frac{\Phi}{2} & \cos \frac{\Phi}{2} - i \sin \frac{\Phi}{2} \cos \eta \end{vmatrix}, \quad (17)$$

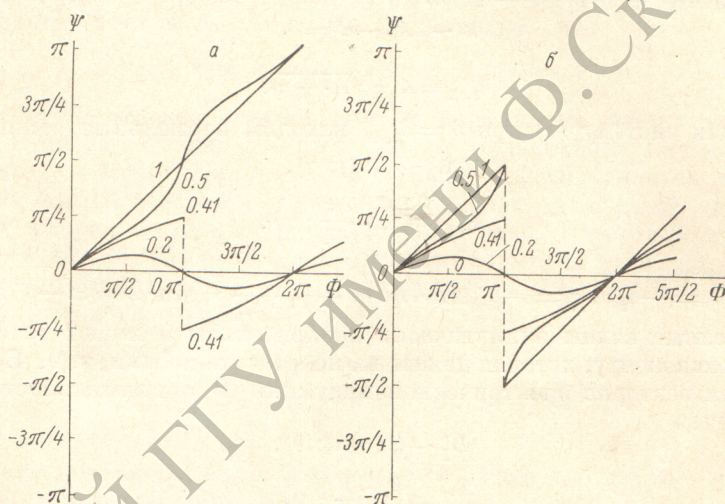


Рис. 1. Зависимость угла поворота большой оси эллипса поляризации от разности фаз между нормальными волнами.

Цифры у кривых — величины χ .

где $\sin \eta = 2\chi/(1 + \chi^2)$, $\cos \eta = (1 - \chi^2)/(1 + \chi^2)$ и $\Phi = (k_1 - k_2)z'$ — разность фаз между собственными волнами. В рассматриваемом случае $(\mathbf{E}')_{z'=0} = \{1, 0, 0\}$ и вектор напряженности электрического поля в среде имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (E'_1)_{z'} &= \cos \frac{\Phi(z')}{2} + i \cos \eta \sin \frac{\Phi(z')}{2}, \\ (E'_2)_{z'} &= \sin \eta \sin \frac{\Phi(z')}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Видно, что волна имеет эллиптическую поляризацию, причем угол поворота большой оси эллипса относительно оси $x'(x'_1)$ («фарадеево вращение») равен [11]

$$\Psi(z') = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\chi(1 + \chi^2) \sin \Phi(z')}{(1 - \chi^2)^2 + 4\chi^2 \cos \Phi(z')}. \quad (19)$$

Зависимость $\Psi(\Phi)$ построена на рис. 1, а и б двумя различными способами. Построение рис. 1, а является более целесообразным при значениях $1 > \chi > \sqrt{2} - 1$, когда хоть с каким-то приближением имеет смысл говорить о «погонном» фарадеевом вращении, т. е. о вращении на единицу длины образца. С другой стороны, построение рис. 1, б является более наглядным в том смысле, что позволяет проследить динамику изменения

эффекта Фарадея при изменении эллиптичности собственных волн. В дальнейшем будем анализировать рис. 1, б.⁴

Нечетная функция $\Psi(\Phi)$ является периодической по Φ с периодом 2π , а следовательно, и по z' с периодом $2\pi/(k_1 - k_2)$. Вид зависимости $\Psi(\Phi)$ определяется значением параметра χ . При $1 \geq \chi > \chi_{кр.} = \sqrt{2} - 1$ на интервале периодичности Ψ является неубывающей функцией Φ и изменяется в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, обращаясь в нуль в центре интервала периодичности. Скачок фарадеева вращения в точках $\Phi = (2n+1)\pi$, $n=0, 1, 2, \dots$ физического смысла не имеет, поскольку значения угла поворота плоскости поляризации $\Psi = +\pi/2$ и $\Psi = -\pi/2$ неразличимы (ср. с рис. 1, а). При $\chi = 1$ собственные волны являются циркулярно поляризованными и наблюдается «классический» эффект Фарадея, когда исходная линейно поляризованная волна при распространении остается линейно поляризованной, но плоскость поляризации ее непрерывно поворачивается на угол $\Psi = \Phi/2$. При $1 > \chi > \sqrt{2} - 1$ линейно поляризованная при $z' = 0$ волна в кристалле в общем случае является эллиптически поляризованной и возвращается к исходному состоянию с линейной поляризацией лишь в точках $\Phi = 2\pi n$. Эллиптичность (отношение малой оси эллипса поляризации к большой) максимальна при $\Phi = (2n+1)\pi$. Когда $\chi = \chi_{кр.} = \sqrt{2} - 1$, то при $\Phi = (2n+1)\pi$ поляризация становится круговой, при этом углом поворота большой оси эллипса следует считать $+\pi/4$, при дальнейшем распространении волны в кристалле эллипс начинает поворачиваться от угла со значением $-\pi/4$ (таким образом, никакого скачка плоскости поляризации при $\chi = \chi_{кр.}$ и $\Phi = \pi$ не происходит). При $\chi_{кр.} > \chi > 0$ максимальный поворот большой оси эллипса поляризации меньше 45° и стремится к нулю при $\chi \rightarrow 0$.

Таким образом, при распространении первоначально линейно поляризованной волны в среде, в которой собственные волны являются эллиптически поляризованными, «классический» эффект Фарадея существенно видоизменяется. При классическом эффекте Фарадея на циркулярно поляризованных волнах угол поворота плоскости поляризации равен половине сдвига фаз между собственными волнами — линейная зависимость $\Psi(\Phi)$. При уменьшении эллиптичности собственных волн ($1 > \chi > \chi_{кр.}$) зависимость $\Psi(\Phi)$ становится нелинейной и обнаруживает периодические колебания относительно линейного закона. При слабой эллиптичности нормальных волн ($\chi_{кр.} > \chi > 0$) вращение не превышает некоторого угла, величина которого, как нетрудно убедиться, равна

$$\Psi_{\max} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\chi}{1 - \chi^2} \quad (20)$$

и достигается при $\cos \Phi = -4\chi^2/(1 - \chi^2)^2$. Большая ось эллипса при этом колеблется относительно нулевого (исходного) значения.

4. Эффект Фарадея в кубических ферримагнетиках

Как было показано в разделе 2, собственные волны в кубических ферримагнетиках имеют в общем случае эллиптическую поляризацию. Круговая поляризация наблюдается лишь при распространении волн вдоль осей симметрии высокого порядка (ось [001] — ось 4-го порядка и ось [111] — 3-го порядка). Поэтому эффект Фарадея будет существенным образом зависеть от того, в каком направлении распространяется волна. Например, при распространении света в плоскости (100) из (14) следует, что

$$\chi = \alpha / (A + \sqrt{A^2 + \alpha^2}) \approx \alpha \left(\frac{1}{2} \beta^{-2} \sin^2 2\theta + \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4} (\beta^{-2})^2 \sin^4 2\theta} \right). \quad (21)$$

⁴ Необходимо помнить, что все полученные здесь и далее результаты относятся к случаю, когда поляризация исходной волны совпадает с одной из осей эллипса поляризации собственных волн.

Волны имеют круговую поляризацию при $\theta=0$ или $\theta=\pi$ (распространение вдоль осей [001] и [010]), а также при $\beta^-=0$. Нетрудно убедиться, что минимальная эллиптичность собственных волн наблюдается при $\theta=\pi/4$, причем

$$\chi_{\min} \approx \alpha \left(\frac{1}{2} \beta^- + \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4} (\beta^-)^2} \right). \quad (22)$$

Поэтому в общем случае (при $\beta^- \neq 0$) будет наблюдаться зависимость угла поворота плоскости поляризации от ориентации намагниченности в плоскости (100). Критическое значение χ в плоскости (100) реализуется при $\alpha=A$, т. е. при

$$\alpha = \frac{1}{2} \beta^- \sin^2 2\theta.$$

При распространении вдоль оси [011] критическое значение χ имеет место при $\alpha = \beta^-/2$. Критическое значение параметра χ (и более низкие значения) могут иметь место в кристаллах с сильным магнитным двулучепреломлением.

Полученные в разделе 3 формулы позволяют рассчитать также зависимость угла поворота большой оси эллипса от длины образца. Действительно, для плоскости (100) из (10), (11), (17) и (19) легко находится связь между Φ и z' .

$$z' = \Phi \frac{\lambda_0 \sqrt{\varepsilon}}{2\pi\alpha} \frac{2\chi}{1+\chi^2}, \quad (23)$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве. Вводя нормированную координату

$$Z' = \frac{z'\alpha}{\lambda_0 \sqrt{\varepsilon}} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{2\chi}{1+\chi^2} \quad (24)$$

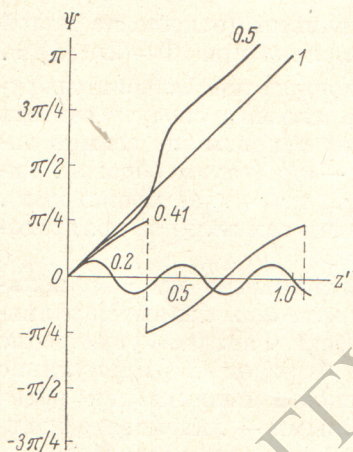


Рис. 2. Зависимость угла поворота большой оси эллипса поляризации от нормированной длины образца.

Цифры у кривых — величины χ .

на рис. 2. Из рис. 2 видно, что при $1 > \chi > \chi_{\text{кр}}$ и при определенной толщине образца двулучепреломление может существенно увеличивать эффект Фарадея по сравнению со случаем $\beta_i=0$. Грубо величину «усиления» эффекта Фарадея можно оценить, взяв отношение тангенса наклона прямой, вблизи которой происходят периодические колебания кривой $\Psi(Z')$, к тангенсу наклона прямой для $\chi=1$. Очевидно максимальное «усиление» достигается при $\chi \rightarrow \chi_{\text{кр}}$ и примерно равно

$$V_{\max} \approx \frac{1 + \chi_{\text{кр}}^2}{2\chi_{\text{кр}}} = \sqrt{2}.$$

При $\chi < \chi_{\text{кр}}$ эффект Фарадея, как видно из рис. 2, слабее по сравнению со случаем $\chi=1$ (без двулучепреломления).

При измерениях фарадеева вращения для направлений, не совпадающих с осями симметрии высокого порядка в кристаллах, где β^- сравнимо с α , неучет квадратичной связи может приводить к значительной ошибке. Действительно, рассмотрим кривую $\Psi(Z')$ при $\chi=0.5$. Измерение фарадеева вращения на кристалле с нормированной длиной 0.25 даст величину 40° , а на кристалле длиной $Z'=0.5$ — 130° . Нормированное вращение в первом случае составляет 160° , а во втором — 260° . При снятии частотных характеристик фарадеева вращения можно ожидать возникновения

пульсаций, аналогичных наблюдаемым в ортоферритах [2], но отличающихся от них сильной анизотропией (при одной и той же длине кристалла).

Автор выражает глубокую благодарность Б. З. Каценеленбауму за обсуждение работы.

Литература

- [1] Ф. И. Федоров, А. Ф. Константинова. *Опт. и спектр.*, 12, 505, 1962.
- [2] М. В. Четкин, Ю. И. Щербаков. *ФТТ*, 11, 1620, 1969.
- [3] Р. В. Писарев, И. Г. Синий, Г. А. Смоленский. *Изв. АН СССР, сер. физ.*, 34, 1032, 1970.
- [4] В. Д. Тронько. *Опт. и спектр.*, 30, 739, 1971.
- [5] J. F. Dillon, J. P. Remeika. *C. R. Staton. J. Appl. Phys.*, 40, 1510, 1969; *J. Appl. Phys.*, 41, 4613, 1970.
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*, М., 1959.
- [7] Дж. Най. *Физические свойства кристаллов*, ИЛ, М., 1960.
- [8] Г. Джеффрис, Б. Свирлс. *Методы математической физики*, вып. 1, Изд. «Мир», М., 1969.
- [9] В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*. Изд. «Наука», М., 1965.
- [10] W. I. Tabor, F. S. Chen. *J. Appl. Phys.*, 40, 2760, 1969.
- [11] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики*. Изд. «Наука», М., 1970.

Поступило в Редакцию 5 января 1972 г.