АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Дифференциальные уравнения, математический анализ и численные методы

С. И. Басина
(*УО «БрГУ им. А. С. Пушкина», Брест*)

ОСТАНОВ ПО НЕВЯЗКЕ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Для решения линейного операторного уравнения первого рода

$$Ax = y_\delta \qquad (1)$$

в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором A предлагается неявный метод итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \qquad (2)$$

Здесь y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и $0 \in SpA$, но 0 не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y уравнения (1).

Определим момент m останова процесса (2) условием [1]

$$\left.\begin{aligned} &\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon, \left(n < m\right) \\ &\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \varepsilon = b\delta, b > 1. \qquad (3)$$

Предполагается, что $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Справедливы

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2) *выбирается по правилу* (3). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если решение x уравнения* (1) *истокообразно представимо, т. е.* $x = A^s z, s > 0$, *то справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le \left[(b+1)\delta\right]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta.$$

Литература

1 Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.