УДК 535.2.01

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СТЕПЕНЕЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В. Я. Анисимов

Корреляционные функции $G^{(n,n)}(\{x\}; \{y\})$ полей (см. [1]), когерентных в n-ом порядке, факторизуются следующим образом:

$$G^{(n,n)}(\{x\}; \{y\}) = g^{(n)}(\{x_0\}; \{x_0\}) \frac{\prod_{j=1}^{n} G^{(1,1)}(x_j; x_0)\, G^{(1,1)}(x_0 y_j)}{[G^{(1,1)}(x_0; x_0)]^n}, \tag{1}$$

где $g^{(n)}(\{x_0\}; \{x_0\})$ — нормированная функция когерентности n-го порядка, равная $G^{(n,n)}(\{x_0\}; \{x_0\})/[G^{(1,1)}(x_0; x_0)]^n$, а посредством $\{x\}$ и $\{y\}$ обозначена совокупность n пространственно-временных точек. Модули степеней когерентности $|g^{(n)}(\{x_0\}; \{x_0\})| = g_n$ не зависят от координат пространственно-временных точек [2]. В работах Глаубера, Титулаера и Чанда [2, 3] был получен ряд неравенств для g_n. Для частного вида полей, имеющих положительно-определенное P-представление [2], эти неравенства можно записать в виде

$$g_n \geqslant g_m g_{n-m}, \quad g_{n-m} g_{n+m} \geqslant g_n^2 \text{ для } m \leqslant n. \tag{2}$$

Используя эти неравенства, Глаубер установил нижнюю границу роста совокупности $\{g_n\}$

$$g_p \geqslant g_n^{((p-1)/(n-1))} \text{ для } p \geqslant n. \tag{3}$$

В общем случае полей, имеющих R-представление, коэффициенты $\{g_n\}$ не обязательно возрастают, и поэтому неравенства, относящиеся к ним, имеют более сложный вид [3]

$$g_{n+1} \geqslant g_n \left\{1 - \frac{n}{\langle b^+ b\rangle}\right\}. \tag{4}$$

Неравенство (4) отличается от неравенств, относящихся к полям, имеющим положительно-определенное P-представление, тем, что в (4) входит среднее число фотонов в моде. Переход от (4) к одному из неравенств (2) можно осуществить, полагая $\langle b^+ b\rangle$ стремящимся к бесконечности. Все вышеприведенные неравенства позволяют сделать выводы лишь о минимально допускаемых значениях $\{g_n\}$, а поскольку уже g_2 может быть больше единицы, то несомненный интерес представляет вопрос о существовании верхней границы роста $\{g_n\}$. В этой работе устанавливается асимптотическое поведение совокупности $\{g_n\}$ при больших n для широкого класса полей, имеющих конечные моменты всех порядков.

Прежде чем приступить к вопросу непосредственного исследования, введем некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Любое поле, имеющее конечные моменты всех порядков, может быть описано в R-представлении некоторой целой аналитической функцией $R(\alpha, \beta^*)$ [4]. Для каждого из таких полей можно найти нормально упорядоченную характеристическую функцию $C(s)$

$$C(s) = \langle : \exp\{isb^+ b\} : \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n s^n i^n \langle b^+ b\rangle^n}{n!}, \tag{5}$$

связанную с коэффициентами разложения R-функции, следующим образом:

$$C(s) = \sum_{k=0}^{\infty} R_{kk} k! (1 + is)^k, \tag{6}$$

здесь $\langle b^+ b\rangle$ — среднее число фотонов в моде не обязательно монохроматической [5], $: :$ обозначает операцию нормального упорядочения, R_{kk} — коэффициент при $\alpha^k (\beta^*)^k$ в разложении функции $R(\alpha, \beta^*)$ по степеням $\alpha\beta^*$. Область сходимости характеристической функции $C(s)$ не обязательно является бесконечной и ее можно определить через коэффициенты R_{kk}. Для нахождения области определения применим необходимый признак сходимости Даламбера к ряду (6), в результате получим

$$|s| \leqslant \sqrt{\lim_{k\to\infty} \frac{R_{kk}^2}{R_{k+1,k+1}^2 (k+1)^2} - 1} = s_0. \tag{7}$$

Для того чтобы выполнялось условие (7), должны существовать ограничения на рост $\{g_n\}$. Применяя необходимый признак сходимости Даламбера к ряду (5), можно найти эти ограничения на верхнюю границу роста $\{g_n\}$

$$g_{N_0+n} \leqslant \frac{g_{N_0}}{s_0^n \langle b^+b\rangle^n} \prod_{k=N_0+1}^{N_0+n} k. \tag{8}$$

Не нарушая общности, выберем $g_{N_0} = CN_0!/s_0^{N_0}\langle b^+b\rangle^{N_0}$, и подставив это значение g_{N_0} в (8), получим

$$g_{N_0+n} \leqslant C\,\frac{(N_0+n)!}{s_0^{N+n}\,\langle b^+b\rangle^{N_0+n}}. \tag{9}$$

В случае полей, для которых $s_0 = \infty$, необходимый признак сходимости Даламбера, примененный к ряду (2), приводит к более простому выражению для g_n

$$g_{N_0+n} \leqslant (N_0+n)! \tag{10}$$

Для полей, имеющих положительно-определенное P-представление, при $m \leqslant N_0$, $g_m \leqslant g_{N_0}$, поскольку в этом случае совокупность $\{g_n\}$ образует неубывающую последовательность.

Литература

[1] В. Я. Анисимов, Б. А. Сотский. Опт. и спектр., *33*, 172, 1972.
[2] U. M. Titulaer, R. J. Glauber. Phys. Rev., *140B*, 676, 1965.
[3] P. Chand. Lett. Nuov. Chim., *4*, 1068, 1970.
[4] Р. Глаубер. Квантовая оптика и радиофизика. ИЛ, М., 1963.
[5] Д. Клаудер, Э. Сударшан. Основы квантовой оптики. Изд. «Мир», М., 1968.

Поступило в Редакцию 13 октября 1971 г.

УДК 539.194.01

К РАСЧЕТУ ФАКТОРОВ ФРАНКА—КОНДОНА ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА МОРЗЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ВКБ-МЕТОДА

О. П. Шадрин и *Н. И. Жирнов*

В работах [1, 2] предложен приближенный метод представления волновых функций осциллятора Морзе полиномами Эрмита в процессе вычисления с указанными функциями интегралов перекрывания. Наибольшие вычислительные трудности при этом вызывает вычисление для очень большого числа точек фазовой функции $S(r)$, определяемой системой трансцендентных уравнений (10а) и (10б) из работы [1].

Указанную часть наиболее трудоемких расчетов можно значительно упростить, если в области наиболее существенного изменения волновой функции заменить точную фазовую функцию $S(r)$ двумя аппроксимирующими полиномами

$$S(r) = \begin{cases} a_0\,(1 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3) & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ b_0\,(1 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3) & \text{при } r \geqslant r_0, \end{cases} \tag{1}$$

с коэффициентами, определяемыми соответственно из условий

$$S(r_1) = S_1;\; S(r_2) = S_2;\; S(r_3) = S_3;\; S(r_0) = 0 \tag{2}$$

и

$$S(r_0) = 0;\; S(r_4) = S_4;\; S(r_5) = S_5;\; S(r_6) = S_6. \tag{3}$$

Здесь r_0 — точка, в которой фазовая функция $S(r)$ обращается в нуль; она определяется как корень уравнения

$$\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon_v}} + \sqrt{1-\varepsilon_v}\,\arcsin\frac{x-1+\varepsilon_v}{x\sqrt{\varepsilon_v}} - \sqrt{\varepsilon_v-(1-x)^2} = 0, \tag{4}$$

где $x = e^{-\alpha(r-r_e)}$ и $\varepsilon_v = E_v/D_e$. Точки $r_{2,\,5}$, определяемые равенствами

$$r_{2,\,5} = r_e - \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 \pm \sqrt{\varepsilon_v}\right), \tag{5}$$