Е. В. Кузьмина
(*БрГУ им. А. С. Пушкина, Брест*)

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Предметом исследования являются обобщенные решения линейного дифференциального уравнения

$$u' + \frac{s}{x}u = 0, \ \text{где} \ \ s = const. \tag{1}$$

Пусть для определенности $u(-1) = (-1)^s$. В пространстве распределений уравнению (1) соответствует семейство уравнений вида

$$u' + s\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)u = 0, \qquad (2)$$

где M – произвольная комплексная постоянная, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная выражением $\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \int \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$, в котором интеграл понимается в смысле главного значении по Коши [1].

Теорема. *Пусть* $s = 2k - 1$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *и аппроксимация коэффициента* $q = s\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)$ *задана формулой*

$$q_{\varepsilon}(x) = \lambda \frac{s}{x + i\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{s}{x - i\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{M}{2i\pi}.$$

Задача Коши для уравнения (2) *разрешима в пространстве обобщенных функций тогда и только тогда, когда* $M = i\pi - \frac{2i\pi m}{s}$, *где* m *– целое число, такое, что* $m \geq s$ *или* $m \leq 0$. *При* $m \geq s$ *обобщенным решением является распределение* $P\left(\frac{1}{x^s}\right) + \frac{(-1)^s}{(s-1)!} i\pi\delta^{(s-1)}$, *а при* $m \leq 0$ *– распределение* $P\left(\frac{1}{x^s}\right) - \frac{(-1)^s}{(s-1)!} i\pi\delta^{(s-1)}$.

Литература

1 Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.