И. О. Шостакович
(*БрГУ им. А. С. Пушкина, Брест*)

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве H решается линейное уравнение $Ax = y_\delta$, где $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0 \in SpA$, т.е. задача неустойчива, а, значит, некорректна [1]. Пусть при точной правой части y существует единственное решение x рассматриваемого уравнения, тогда для отыскания решения уравнения $Ax = y_\delta$ применим явный метод итераций

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \qquad (1)$$

Справедлива

<u>Теорема</u>. *При условии* $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$ *итерационный процесс* (1) *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. *Если точное решение* x *уравнения истокопредставимо* $(x = A^s z,\ s > 0)$, *то при* $0 < \alpha \le 5\left(4\|A\|\right)^{-1}$ *для* (1) *справедлива оценка погрешности* $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s\left(2n\alpha e\right)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta$.

Оптимальная оценка погрешности для итерационного метода (1) имеет вид $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ и достигается при $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Оценка $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}}$ не зависит от параметра α, но от него зависит априорный момент останова итераций $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le 5\left(4\|A\|\right)^{-1}$ и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in Z$.

Литература

1 Матысик, О.В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.