А. С. Устинович
(*УО «БрГУ им. А. С. Пушкина», Брест*)

СЛУЧАЙ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль является собственным значением. Следовательно, задача некорректна, так как имеет неединственное решение.

Для решения уравнения (1) применим регуляризующий алгоритм в виде явного итерационного процесса с попеременно чередующимся шагом:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}\left(Ax_n - y\right), \quad x_0 = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, а $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива [1]

Теорема. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2$, $(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta$, $\alpha\beta < \alpha + \beta$. *Тогда для явного итерационного метода* (2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Замечание. *Так как* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т. е. итерационный процесс* (2) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

Литература

1 Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166-176.