В. Ю. Медведева
(*УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Гродно*)

О РАЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ $|x|^{\alpha}$ ПО РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЕ УЗЛОВ ЧЕБЫШЕВА-МАРКОВА

Будем интерполировать функцию $f(x)=|x|^{\alpha}$, $\alpha>0$ по расширенной системе узлов Чебышева-Маркова на отрезке $[-1,1]$.

Пусть $m_{2n}(x)$ – косинус дробь Чебышева-Маркова

$$m_{2n}(x)=\cos\mu_{2n}(x),$$

где $\mu_{2n}(x)=\sum_{k=1}^{2n}\arccos\frac{x-a_k}{1-a_k x}$, $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ – чисто мнимые числа, $\operatorname{Re} a_k=0$, $k=1,...,2n$, причём $a_{n+k}=-a_k$, $\operatorname{Im} a_k\geq 0$, $k=1,2,\ldots,n$ и $a_1=...=a_r=0$, $r=[\alpha/2]+1$, $n>r$.

В этом случае функция $m_{2n}(x)$ имеет $2n$ простых симметричных нулей на интервале $(-1,1)$:

$$x_{2n-k+1}=-x_k,\ k=1,2,\ldots,n.$$

Возьмём их и точку $x_0=0$ в качестве узлов и построим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа:

$$L_{2n}(x,\ f)=\sum_{k=1}^{n}x_k^{\alpha-1}\frac{xm_{2n}(x)}{(x-x_k)m'_{2n}(x_k)}-\sum_{k=n+1}^{2n}(-x_k)^{\alpha-1}\frac{xm_{2n}(x)}{(x-x_k)m'_{2n}(x_k)}.$$

Получено интегральное представление остатка интерполирования.

В частном же случае, когда все числа $a_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$, имеем следующий результат:

$$\varepsilon_{n,0}=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\frac{1}{(2n)^\alpha}\int_0^{2n}\frac{t^{\alpha-1}}{\left(1-(t/2n)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{dt}{\left(\frac{1-t/2n}{1+t/2n}\right)^{n}+\left(\frac{1-t/2n}{1+t/2n}\right)^{-n}}.$$

Так как подынтегральная функция равномерно относительно $t\in[0,2n]$ сходится при $n\to\infty$ к функции $t^{\alpha-1}/\left(e^t+e^{-t}\right)$, то

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^\alpha\varepsilon_{n,0}=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t+e^{-t}}dt.$$

Этот результат получен в работе М. И. Ганзбурга [1].

Литература

1 Ganzburg, M. The Bernstein Constant and Polynomial Interpolation at the Chebyshev Nodes / M. Ganzburg // J. Approx. Theory. – 2002. – Vol. 119, № 2. – P. 193-213.