П. А. Голуб, А. Р. Миротин
(*УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель*)

О ПОЛУФРЕДГОЛЬМОВОСТИ И ИНДЕКСЕ ТЁПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРУППАХ

Всюду ниже G – нетривиальная связная компактная абелева группа с линейно упорядоченной группой характеров X и положительным конусом X_+. В работе [1] доказана теорема о фредгольмовости и индексе тёплицевых операторов на G, обобщающая классическую теорему Гохберга-Крейна. Там же было отмечено, что в группах, отличных от одномерного тора, всегда существуют тёплицевы операторы с непрерывным символом, которые полуфредгольмовы, но не фредгольмовы (на одномерном торе это невозможно). Ниже дается аналог основного результата из [1] для полуфредгольмовых операторов Тёплица на группе G.

Далее $C(G)^{-1}$ будет обозначать группу обратимых элементов алгебры $C(G)$ непрерывных комплекснозначных функций на группе G; символ # обозначает число элементов конечного множества или $+\infty$, если множество бесконечно. Ниже используется тот факт, что любая функция $\varphi \in C(G)^{-1}$ представима в виде $\chi e^{g}, g \in C(G), \chi \in X$ (разложение Бора-ван Кампена), причем характер χ в этом разложении определяется однозначно.

Определение. *Индекс вращения функции* $\varphi \in C(G)^{-1}$ есть индекс вращения её характера в разложении Бора-ван Кампена, который определяется следующим образом:

$$\mathrm{ind}\chi = \begin{cases} \#(X_+ \setminus \chi X_+), & \chi \in X_+ \\ -\mathrm{ind}\,\chi^{-1}, & \chi \notin X_+ \end{cases}.$$

Теорема. 1) *Для оператора Тёплица* T_φ *в пространстве* $H^2(G)$ *с символом* $\varphi \in C(G)$ *следующие утверждения равносильны*:

а) T_φ *полуфредгольмов*; б) T_φ *односторонне обратим*; в) $\varphi \in C(G)^{-1}$.

При этом для любого символа $\varphi \in C(G)^{-1}$ *справедливо равенство* $\mathrm{Ind}T_\varphi = -\mathrm{ind}\varphi$.

Литература

1 Миротин, А. Р. Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H ^{p} над упорядоченными группами / А. Р. Миротин. – Матем. сб., 2011. – № 5 (202). – С. 101 – 116.