У. М. Карват
(*БрГУ им. А. С. Пушкина, Брест*)

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Для решения в действительном гильбертовом пространстве H линейного некорректного уравнения I рода $Ax = y_\delta$, где $\| y - y_\delta \| \le \delta$, A – положительный ограниченный самосопряженный оператор (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, т.е. рассматриваемая задача некорректна) используем неявную итерационную процедуру

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим поведение приближений (1) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. Использование энергетической нормы позволяет получить оценки погрешности процедуры (1) без знания дополнительной информации на гладкость точного решения уравнения $Ax = y_\delta$ – его истокообразную представимость: $x = A^s z,\ s > 0$ [1].

Теорема 1. *Итерационная процедура* (1) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в энергетической норме, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $n^{1/2}\delta \to 0, \quad n \to \infty, \quad \delta \to 0.$

Теорема 2. *Априорная оценка погрешности для процедуры* (1) *при* $\alpha > 0$ *имеет вид* $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\| + (2n\alpha)^{1/2}\delta, \quad n \ge 1.$ *При априорном моменте останова* $n_{\text{опт}} = 2^{-3/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\|x\|\delta^{-1}$ *получена оптимальная оценка погрешности:* $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{3/4} e^{-1/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$.

Очевидно, что для уменьшения количества итераций для достижения заданной точности следует брать α возможно большим из условия $\alpha > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in Z$.

За счет того, что на α нет ограничений сверху, можно добиться, что оптимальная оценка погрешности для метода (1) будет достигаться уже на первом шаге итерации.

Литература

1 Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.