Н. С. Костюченко
(*ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель*)

КВАЗИМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Квазиметрическим пространством* называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого *множества* X и *расстояния*, т.е. неотрицательной действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
3) $\rho(x, y) \leq c\,(\rho(x, z) + \rho(z, y))$, где c – *некоторая константа.*

Лемма 1. *Аксиома 3) равносильна следующему утверждению:* $\rho(x, y) \leq k \max\{(\rho(x, z), \rho(z, y)\}$, *где k – некая константа*.

Определение. Пусть X – векторное пространство, $p > 0$. p-*нормой* называется такая функция $\|x\|$ на X, что:

1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,

2) $\|\lambda x\| = \lambda^p \|x\|$,

3) $\|x + y\|^p \le \|x\|^p + \|y\|^p$.

Пример. Пространство $l_p = \{x = (x_n): \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, где $0 < p < 1$, $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^p$ является -нормированным, но не нормированным.

Следующие два утверждения дают нам примеры квазиметрических пространств.

Лемма 2. *Если* $d(x, y)$ *– метрика на X, то* $\forall\ q > 0$ *функция* $p(x, y) := d(x, y)^q$ *есть квазиметрика на X.*

Теорема 1. *Если X – p-нормированое пространство,* $0 < p < 1$, *то* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *– квазиметрика.*

Определение шара и полного пространства в квазиметрическом случае те же, что и в метрическом. При этом, в квазиметрическом пространстве выполняется теорема о вложенных шарах.

Теорема 2. *Для того чтобы квазиметрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*