В. Ю. Медведева
(*УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Гродно*)

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИИ $|\sin\theta|$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Будем интерполировать функцию $|\sin\theta|$, $\theta\in R$ тригонометрическими полиномами с узлами в нулях функции $\cos n\theta$, то есть в точках

$$\theta_k=(2k-1)\pi/2n,\ \theta_{k+n}=-\theta_k,\ k=\overline{1,n} \text{ и в точке } \theta_0=0 \qquad (1)$$

Перейдём к действительной оси с помощью замены $x=tg\,\theta/2$. Тогда, $|\sin\theta|=\dfrac{2|x|}{1+x^2}=:\varphi(x)$, $\cos n\theta=\cos 2n\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=:m_n(x)$.

Преобразовав, получим, что $m_n(x)$ есть рациональная функция вида: $m_n(x)=\dfrac{p_{2n}(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$, где $p_{2n}(x)=\dfrac{1}{2}\left((x+i)^{2n}+(x-i)^{2n}\right)$, $p_{2n}(x)\in P_{2n}$, которая имеет на R $2n$ простых симметричных нулей $x_{n+k}=-x_k$, $k=\overline{1,n}$. Возьмём их и точку $x_0=0$ в качестве узлов и построим интерполяционную рациональную функцию для функции $\varphi(x)=\dfrac{2|x|}{1+x^2}$: $L_n(x,\varphi)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{1+x_k^2}\dfrac{xm_n(x)}{(x-x_k)m_n'(x_k)}-\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{2}{1+x_k^2}\dfrac{xm_n(x)}{(x-x_k)m_n'(x_k)}$.

С помощью вспомогательной интерполяционной рациональной функции $L_n^*(x,g)=\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{g(x_k)}{1+x_k^2}\dfrac{\left(1+x^2\right)m_n(x)}{(x-x_k)m_n'(x_k)}$, $x\in R$, где $g(x)-$ заданная на R 2π-периодическая функция, находим $\varepsilon_n(x)=\varphi(x)-L_n(x)=m_n(x)H_n(x)$, где $H_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{4x}{1+x_k^2}\dfrac{1}{(x-x_k)m_n'(x_k)}$.

Тригонометрический интерполяционный полином с узлами в θ_k получается из интерполяционной рациональной функции с помощью замены $t_n(\theta, |\sin\theta|) = L_n\left(tg\,\theta/2, \frac{2|x|}{1+x^2}\right)$.

Теорема. Для остатка интерполирования функции $|\sin\theta|$ тригонометрическими полиномами с узлами (1) имеет место асимптотическое равенство

$$\max\left|\left|\sin\theta\right| - t_n(\theta, |\sin\theta|)\right| = 1/2n + O\left(1/n^2\right),\ n \to \infty,\ \theta \in R.$$