А. В. Приведенец
(*УО «БрГУ им. А. С. Пушкина», Брест*)

ОБ ИНДЕКСЕ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОСТИ

Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания тройки гармонических функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x) \in C^2(\Omega) \cap \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ удовлетворяющих на границе краевым условиям

$$\begin{cases} (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)\big|_{\partial\Omega} = f_1, \\ (b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)\big|_{\partial\Omega} = f_2, \\ \left(c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial \nu} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial\Omega} = f_3. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f_1, f_2, f_3 : \partial\Omega \to R$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции; $a_k, b_k, c_k \in R, (k \in 1, 2, 3)$; $\partial/\partial\nu$ – оператор дифференцирования по направлению внутренней нормали к $\partial\Omega$.

В работе исследуются вопросы регуляризуемости и индекса краевой задачи. Через A обозначим матрицу коэффициентов системы краевых условий (1). Напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского [1]. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу A и обеспечивает разрешимость краевой задачи с точностью до конечномерного пространства, т.е. однородная задача имеет α линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение β линейно независимых условий разрешимости. Число $\alpha - \beta$ называется индексом задачи.

Теорема. Рассматриваемая задача регуляризуема тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Индекс регуляризуемой задачи равен нулю.

Для доказательства устанавливается, что минор матрицы Лопатинского нашей задачи образованный первыми тремя столбцами является ранговым. Индекс вычисляется методом гомотопий.

Литература

1 Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3 – 120.