2.144.12
26

95.1

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. С. ВЕГЕРА, А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т. И. ВАСИЛЬЕВА

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

ПРЕПРИНТ № 1, *май 2015*

УК 92670007

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны універсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015

ц 17

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

УДК 512.542
ББК 22.144.12
В 26

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор М. В. Селькин;
кандидат физико-математических наук, доцент С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-техническим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Вегера, А. С.

В 26 Конечные группы с заданными формационно субнормальными силовскими подгруппами [Текст] / А. С. Вегера, А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева. — Гомель. ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. — 23 с. — (Препринт / М-во образования РБ, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 1).

Для множества простых чисел π и наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ изучены свойства класса групп G, у которых единичная подгруппа и все силовские p-подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны (К-$\mathfrak{F}$-субнормальны) в G для p из π. Установлено, что такой класс являются наследственной насыщенной формацией, и найден ее максимальный внутренний локальный экран. Получены критерии принадлежности группы наследственной насыщенной формации.

УДК 512.542
ББК 22.144.12

© Вегера А. С., Васильев А. Ф., Васильева Т. И.. 2015
© Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2015

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной в ней. В 1969 году Т.О. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в разрешимой группе. В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил данное понятие на произвольные конечные группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G (обозначается H $\mathfrak{F}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь максимальных подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Еще одно обобщение субнормальности предложил в 1978 году О. Кегель [3], введя понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной, согласно [4, с. 236]) подгруппы.

Подгруппа H группы G называется *K-$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G (обозначается H K-$\mathfrak{F}$-sn G), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Отметим, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех нильпотентных групп, понятия субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп эквивалентны.

Свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения активно изучались в различных направлениях и нашли отражение в многочисленных работах, в частности, в монографиях [4], [5].

В работе [6] было начато рассмотрение следующей общей проблемы.

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Изучить влияние $\mathfrak{F}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}$-субнормальных) силовских подгрупп на строение всей группы.*

В [7] для наследственной насыщенной формаци $\mathfrak{F}$ было доказано, что класс $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ всех групп, силовские подгруппы которых являются $\mathfrak{F}$-субнормальными, образует наследственную насыщенную формацию. Также в классе разрешимых групп было установлено локальное задание формации $\mathrm{w}\mathfrak{F}$.

В работах [8], [9-10] аналогичные результаты были получены для класса $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$ всех групп, у которых все силовские подгруппы группы являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными.

Важность классов $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$ была подчеркнута работами [11-15], где исследовались их свойства и приложения для факторизаций групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

В связи с полученными результатами возникает следующая

Проблема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и π — некоторое множество простых чисел. Установить свойства класса $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ ($\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$) всех групп G, у которых единичная подгруппа и все силовские p-подгруппы для $p \in \pi$ являются $\mathfrak{F}$-субнормальными (соответственно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными) в G.*

Заметим, что в общем случае $\mathrm{w}\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Например, для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп существуют несверхразрешимые группы, у которых все силовские подгруппы являются $\mathfrak{U}$-субнормальными (см., пример из [11]). В статье [16] были построены серии наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, совпадающих с формацией всех групп, у которой все силовские подгруппы являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными. В сязи с этим возникает следующая

Проблема 2. *Найти условия, при которых $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ ($\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$).*

Настоящая работа посвящена решению проблем 1 и 2.

1. Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [2], [17].

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π — подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Пусть G — группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G, $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа G, $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп G, $F_p(G)$ — p-нильпотентный радикал G, т. е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G, Z_p — циклическая группа порядка p, 1 — единичная группа.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

Лемма 1.1 [17, гл. A, теорема 6.4]. *Пусть G — группа и $p \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$, тогда $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$.

2) Если $N_1 \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$.

3) Пусть $\{p_1, \ldots, p_r\}$ — полное множество простых делителей $|G|$ и $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ для $i = 1, \ldots, r$. Тогда $G = \langle P_1, \ldots, P_r \rangle$.

Лемма 1.2 [17, гл. A, теорема 9.2 (e)]. *Пусть G — группа. Если $N \trianglelefteq G$, то $\Phi(N) \leq \Phi(G)$ и $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$, и если $N \leq \Phi(G)$, то $\Phi(G/N) \leq \Phi(G)/N$.*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Напомним, что *цоколем* группы G называется подгруппа $Soc(G)$, являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Через $\bar{F}(G)$ обозначается такая подгруппа группы G [2, с. 79], что $\Phi(G) \leq \bar{F}(G)$ и $\bar{F}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$.

Приведем некоторые свойства подгруппы $\bar{F}(G)$ [18], [19].

Лемма 1.3. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если $N \leq \Phi(G)$, то $\bar{F}(G/N) = \bar{F}(G)/N$.

2) $\bar{F}(N) \leq \bar{F}(G)$.

3) $\bar{F}(G)N/N \leq \bar{F}(G/N)$.

4) $F^*(G) \leq \bar{F}(G)$.

Лемма 1.4. [2, лемма 3.9]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_\pi$ — класс всех π-групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{X}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{G}$ — класс всех групп, $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп.

Минимальной не $\mathfrak{X}$-группой называется группа G такая, что $G \notin \mathfrak{X}$, а каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{X}$. Множество всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп будем обозначать через $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$. Минимальная не $\mathfrak{N}$-группа называется *группой Шмидта*.

Произведением классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G|$ в группе G имеется $N \trianglelefteq G$ такая, что $N \in \mathfrak{X}$ и $G/N \in \mathfrak{Y})$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если 1) $\mathfrak{F}$ — гомоморф, т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и 2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается *$\mathfrak{F}$-корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Функция $f : \mathbb{P} \to \{$ формации $\}$ называется *локальным экраном*. Через $LF(f)$ обозначим класс всех групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

для любого простого p. Внутренний экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *максимальным внутренним*, если для любого ее внутреннего экрана h имеет место включение $h(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p.

Лемма 1.5 [4, с. 95]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$, $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$ и $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times \times O_{\pi_2}(G)$, где $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}_1$ и $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{F}_2)$ — формация. Более того, если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — наследственные насыщенные формации, то $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ — также наследственная насыщенная формация.*

Сформулируем лемму 3.12 из [2] для локальных экранов.

Лемма 1.6. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние локальные экраны формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$ для любого простого p.*

Лемма 1.7 [2, лемма 4.5]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 1.8. *Пусть $\mathfrak{F}_i = LF(f_i)$, где f_i — локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2)$. Если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда по лемме 1.7 фактор-группа $G/F_p(G) \in f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как по условию $f_1(p) \subseteq f_2(p)$, то $G/F_p(G) \in f_2(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. И тогда по лемме 1.7 группа $G \in \mathfrak{F}_2$. ☑

Лемма 1.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственные насыщенные формации, $\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F} \neq \varnothing$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, $\Phi(G) = 1$, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $N = G^{\mathfrak{F}} = F(G)$.*

Доказательство. Из наследственности $\mathfrak{X}$ и выбора G следует, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ и $|G/\Phi(G)| < < |G|$ заключаем, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что существует минимальная нормальная подгруппа K группы G и $K \neq N$. Тогда $G/N \in \mathfrak{X}$ и $G/K \in \mathfrak{X}$. Из выбора G следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/K \in \mathfrak{F}$. Так как $N \cap K = 1$ и $\mathfrak{F}$ — формация, заключаем, что $G/(N \cap K) \simeq G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} = N = F(G)$. □

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2. Свойства обобщенно субнормальных подгрупп

В настоящем разделе приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. В дальнейшем в работе $\mathfrak{F}$ означает непустую формацию.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, H и K — подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N (HN/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N).

2) Если $N \leq H$ и H/N $\mathfrak{F}$-sn G/N (H/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N), то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G).

3) Если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то HN $\mathfrak{F}$-sn G (HN K-$\mathfrak{F}$-sn G).

4) Если H $\mathfrak{F}$-sn K (H K-$\mathfrak{F}$-sn K) и K $\mathfrak{F}$-sn G (K K-$\mathfrak{F}$-sn G), то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G).

5) Если все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то всякая субнормальная подгруппа G является $\mathfrak{F}$-субнормальной.

6) Пусть p — простое число и G — p-группа. Если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то в G все подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $H \leq G$ и $M \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn M ($H \cap M$ K-$\mathfrak{F}$-sn M).

2) Если H $\mathfrak{F}$-sn G и M $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G и M K-$\mathfrak{F}$-sn G), то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn G ($H \cap M$ K-$\mathfrak{F}$-sn G).

3) Если $G^{\mathfrak{F}} \leq H$, то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G).

2) Если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то H^x $\mathfrak{F}$-sn G (H^x K-$\mathfrak{F}$-sn G) для любого $x \in G$.

Лемма 2.3 [20, лемма 2.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, H K-$\mathfrak{F}$-sn G, p — простое число и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $O_p(H) \leq O_p(G)$.*

Лемма 2.4 [20, лемма 2.4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если группа $G = AB$, где A — π-подгруппа и A K-$\mathfrak{F}$-sn G, B — π'-подгруппа, то $A \trianglelefteq G$.*

Лемма 2.5 [20, лемма 2.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $G = H\bar{F}(G)$, где $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-sn G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и G — группа. Если единичная подгруппа 1 $\mathfrak{F}$-sn G, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. Для любой $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ по 1) леммы 2.2 имеем 1 $\mathfrak{F}$-sn P. Тогда $P^{\mathfrak{F}}$ содержится в максимальной подгруппе M группы P. Поэтому $P/M \simeq Z_p \in \mathfrak{F}$. Значит, $\pi(G) \subseteq \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. □

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3. Свойства классов групп $w_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{w}_\pi\mathfrak{F}$

Определение 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Введем следующие классы групп:*

$\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ *— класс всех групп G, у которых 1 $\mathfrak{F}$-sn G и Q $\mathfrak{F}$-sn G для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G)$,*

$\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ *— класс всех групп G, у которых Q K-$\mathfrak{F}$-sn G для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G)$.*

По определению $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ содержит все π'-группы G, у которых 1 $\mathfrak{F}$-sn G, и $\mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$.

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, будем обозначать $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$, вместо $\mathrm{w}_{\mathbb{P}}\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_{\mathbb{P}}\mathfrak{F}$. Основные свойства классов $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ собраны в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если π_1 — множество простых чисел и $\pi \subseteq \pi_1$, то $\mathrm{w}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$.

2) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\pi(\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$.

3) $\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$.

4) $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{w}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$.

5) $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственные формации.

6) $\mathrm{w}_\pi(\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}) = \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi(\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}) = \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$.

7) Если $\mathfrak{H}$ — наследственная формация и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{H}$.

Доказательство. Утверждение 1). Пусть $G \in \mathrm{w}_{\pi_1}\mathfrak{F}$ ($G \in \overline{\mathrm{w}}_{\pi_1}\mathfrak{F}$), $q \in \pi \cap \pi(G)$ и Q — любая силовская q-подгруппа из G. Так как $q \in \pi_1 \cap \pi(G)$, подгруппа Q $\mathfrak{F}$-sn G (соответственно Q K-$\mathfrak{F}$-sn G). Ввиду определения 3.1 $\mathrm{w}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ (соответственно $\overline{\mathrm{w}}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$).

Утверждение 2). Из 3) леммы 2.2 следует $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Ввиду 1) теоремы и определений $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп $\mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и леммы 2.6 заключаем, что $\pi(\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Утверждение 3). Пусть $G \in \mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}$. Заметим, что $Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда по 5) леммы 2.1 $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

Если $G \in \mathfrak{N}_\pi$, то любая силовская подгруппа группы G является нормальной, а значит, K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Поэтому $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$.

Утверждение 4). Из 1) теоремы следует, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathrm{w}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$. По 2) теоремы $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда, $\pi \cap \pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(G) = \pi \cap \pi(G)$. Следовательно, в группе G любая силовская q-подгруппа, где $q \in \pi \cap \pi(G)$, является $\mathfrak{F}$-субнормальной. Это означает, что $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Итак, $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{w}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Утверждение 5). Докажем наследственность $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Рассмотрим группу $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ и произвольную подгруппу H из G. Пусть $q \in \pi \cap \cap \pi(H)$. По теореме Силова силовская q-подгруппа S из H содержится в некоторой силовской q-подгруппе Q группы G. Из Q K-$\mathfrak{F}$-sn G по утверждению 1) леммы 2.2 следует K-$\mathfrak{F}$-субнормальность $H \cap Q = S$ в H. Значит, $H \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Наследственность класса групп $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ доказывается аналогично. Заметим, если $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $H \leq G$, то из 1 $\mathfrak{F}$-sn G по 1) леммы 2.2 следует, что 1 $\mathfrak{F}$-sn H.

Докажем, что $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф. Пусть $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$ и $p \in \in \pi \cap \pi(G/N)$. Рассмотрим $P/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. Фактор-группа $P/N = = HN/N$ для некоторой силовской p-подгруппы H группы G. Из $G \in \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что H K-$\mathfrak{F}$-sn G. Тогда по утверждению 1) леммы 2.1 $P/N = HN/N$ K-$\mathfrak{F}$-sn G/N. Поэтому $G/N \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Итак, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф. Аналогично доказывается, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф. При этом ввиду 1) леммы 2.1, если $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то из 1 $\mathfrak{F}$-sn G следует, что $1 \simeq N/N$ $\mathfrak{F}$-sn G/N.

Теперь покажем, что $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2, для которых $G/N_1 \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, $G/N_2 \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу R группы G, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Так как RN_i/N_i — силовская p-подгруппа в G/N_i и $G/N_i \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, то RN_i/N_i K-$\mathfrak{F}$-sn G/N_i, $i = 1, 2$. По 2) леммы 2.1 RN_i K-$\mathfrak{F}$-sn G, $i = 1, 2$. Ввиду 2) леммы 1.1 и утверждения 2) леммы 2.2 подгруппа $RN_1 \cap RN_2 = R(N_1 \cap N_2) = R$ K-$\mathfrak{F}$-sn G. Отсюда и из 4) леммы 2.2 получаем, что $G/N_1 \cap N_2 \simeq G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Итак, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений.

Аналогично доказывается, что класс групп $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Заметим, что при $G/N_i \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ единичная подгруппа $1 \simeq N_1 \cap N_2/N_1 \cap N_2$ $\mathfrak{F}$-sn $G/N_1 \cap N_2$. Итак, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственные формации.

Утверждение 6). Пусть $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Из утверждения 5) теоремы следует, что $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1$ — наследственные формации. Тогда по 2) теоремы следует, что $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{X}_1$.

Докажем, что $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{X}$. Пусть $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Ввиду 3) теоремы $G \neq \neq Q$. Так как $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X}$, в G найдется подгруппа M такая, что $Q \leq M$ и либо $G^{\mathfrak{X}} \leq M$, либо $M \trianglelefteq G$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M. По утверждению 5) теоремы, $G/N \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X}$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{X}$. Поэтому QN/N

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

K-$\mathfrak{F}$-sn G/N. Отсюда QN K-$\mathfrak{F}$-sn G ввиду утверждения 2) леммы 2.1. Из наследственности $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X}$ и $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X}$ следует, что $QN \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X}$. Так как $QN \neq G$, $QN \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, $Q \in \mathrm{Syl}_p(QN)$ и $p \in \pi \cap \pi(QN)$, то Q K-$\mathfrak{F}$-sn QN. По утверждению 4) леммы 2.1 Q K-$\mathfrak{F}$-sn G. Получили, что $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G. Значит, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$. Итак, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Аналогично доказывается, что если G — группа наименьшего порядка из $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{X}_1 \backslash \mathfrak{X}_1$, $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то Q $\mathfrak{F}$-sn G. Так как $G \notin \mathfrak{X}_1$, 1 не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и G — π'-группа. Из $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{X}_1$ следует, что 1 $\mathfrak{X}_1$-sn G. Поэтому $G^{\mathfrak{X}_1} \leq M_1$, где M_1 — некоторая максимальная подгруппа группы G. Тогда из $G/G^{\mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_1$ следует, что $1 \simeq G^{\mathfrak{X}_1}/G^{\mathfrak{X}_1}$ $\mathfrak{F}$-sn $G/G^{\mathfrak{X}_1}$. По 2) леммы 2.1 $G^{\mathfrak{X}_1}$ $\mathfrak{F}$-sn G. Так как $|G^{\mathfrak{X}_1}| < |G|$, $G^{\mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_1$. Тогда 1 $\mathfrak{F}$-sn $G^{\mathfrak{X}_1}$. По 4) леммы 2.1 единичная подгруппа 1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Получили противоречие. Значит, $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1$ и $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1$.

Утверждение 7) следует из определения 3.1 и определений $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп. □

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, группа $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\pi(G) \subseteq \pi \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Каждый композиционный фактор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.

2) $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1). Пусть группа $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ и H/K — ее произвольный композиционный фактор. Из утверждения 5) теоремы 3.2 следует, что $H \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Так как $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф, то $H/K \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Пусть $P/K \in \mathrm{Syl}_p(H/K)$, где $p \in \pi$. Если $P/K = H/K$, то H/K — простая примарная группа. Это означает, что $|H/K| = p$. При этом $\pi(H/K) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $H/K \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $P/K \neq H/K$. Так как P/K K-$\mathfrak{F}$-sn H/K и H/K — простая группа, в H/K найдется максимальная подгруппа M/K такая, что $(H/K)^{\mathfrak{F}} \leq M/K$. Из $(H/K)^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H/K$ заключаем, что $(H/K)^{\mathfrak{F}} = 1$. Следовательно, $H/K \in \mathfrak{F}$.

Утверждение 2). Следует из 1) леммы и определения класса групп $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. □

Между классами $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ имеется следующая связь.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi\cup\pi(\mathfrak{F})} \supseteq \mathfrak{N}_{\pi\backslash\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

2) Если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi\backslash\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1). Пусть $G \in \mathfrak{N}_{\pi\backslash\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{N}_{\pi\backslash\pi(\mathfrak{F})}$ и $B \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу $P \in G$, где $p \in \pi$. Если $P \leq A$, то из

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

нильпотентности A следует, что $P \trianglelefteq A$. Так как $A \trianglelefteq G$, подгруппа P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Пусть теперь $P \leq B$. Из $B \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что P $\mathfrak{F}$-sn B. Отсюда и из $B \trianglelefteq G$, заключаем, что P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Таким образом, $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Заметим также, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi\cup\pi(\mathfrak{F})}$. Итак, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi\cup\pi(\mathfrak{F})} \supseteq$ $\supseteq \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

Утверждение 2). Пусть $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. По утверждению 1) теоремы $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi \supseteq \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Обозначим $\tau = \pi \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу P группы G, где $p \in \tau$. Тогда по лемме 2.3 подгруппа $P =$ $= O_p(P) \leq O_p(G)$. Поэтому $P = O_p(G) \trianglelefteq G$. Если $\tau \cap \pi(G) = \{p_1, \ldots$ $\ldots, p_n\}$ и $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 1, \ldots, n$, то произведение $A = P_1P_2\ldots P_n$ является нормальной нильпотентной подгруппой группы G. Ясно, что $|A|$ и $|G : A|$ взаимно просты, поэтому A — холлова подгруппа группы G и $A \in \mathfrak{N}_\tau$.

По теореме Шура-Цассенхауза подгруппа A имеет дополнение в G, т. е. существует подгруппа B порядка $|G : A|$ такая, что $G = AB$ и $A \cap$ $\cap B = 1$. Пусть Q — силовская подгруппа из B. Рассмотрим подгруппу QA. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, по 5) теоремы 3.2 $QA \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Поэтому Q K-$\mathfrak{F}$-sn QA. По лемме 2.4 подгруппа $Q \trianglelefteq QA$. Это означает, что $A \leq N_G(Q)$. Пусть $\{q_1, \ldots, q_m\}$ — полное множество простых делителей $|B|$ и $Q_i \in \mathrm{Syl}_{q_i}(B)$, $i = 1, \ldots, m$. По 3) леммы 1.1 $B = \langle Q_1, \ldots, Q_m\rangle$. Из $A \leq N_G(Q_i)$ для $i = 1, \ldots, m$ заключаем, что $A \leq N_G(B)$. Тогда $G = AB \leq N_G(B)$. Поэтому $B \trianglelefteq G$. Так как $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$, подгруппа $B \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Из $\pi(B) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$ по 2) леммы 3.3 заключаем, что $B \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Итак, $G \in \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Равенство $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ доказано. □

Следствие 3.4.1 [10, теорема 2.2]. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times \mathrm{w}\mathfrak{F}$.*

Следствие 3.4.2. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.*

Заметим, что условие $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$ в 2) теоремы 3.4 существенно. Например, пусть $\pi = \{7\}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $\pi(\mathfrak{F}) = \{2, 3, 5, 7\}$, и $G =$ $= A_5$ — знакопеременная группа на 5 символах. Тогда $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$. Так как $G = G^{\mathfrak{F}}$, $G \notin \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

Установим насыщенность и локальный экран формации $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По 5) теоремы 3.2 $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Докажем насыщенность $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Предположим противное. Пусть G

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

— группа наименьшего порядка такая, что $G/\Phi(G) \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $G \notin \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа G. Из $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G) \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $(G/N)/\Phi(G/N) \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Ввиду выбора G получаем, что $G/N \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Так как $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ — формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G и $N \leq \Phi(G)$. Таким образом, N — p-группа для некоторого простого p и $O_{p'}(G) = 1$.

Заметим, что 1 $\mathfrak{F}$-sn G. Действидельно, из $G/N \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $1 \simeq N/N$ $\mathfrak{F}$-sn G/N. По лемме 2.6 $\pi(G/N) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По 2) леммы 2.1 N $\mathfrak{F}$-sn G. При этом $N \leq \Phi(G)$. Тогда $\pi(G) = \pi(G/N)$ и $N \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. По 3) леммы 2.2 и 4) леммы 2.1 единичная подгруппа 1 $\mathfrak{F}$-sn G.

Из определения класса групп $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что G не является π'-группой.

Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа G для $q \in \pi \cap \cap\, \pi(G)$. Из $G/N \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и 2) леммы 2.1 следует, что QN $\mathfrak{F}$-sn G. Пусть $A = Q\bar{F}(G)$. Заметим, что нормальная в $A/\Phi(G)$ подгруппа $\bar{F}(G)/\Phi(G)$ квазинильпотентна. По теореме 13.10 [21 гл. X] и 4) леммы 1.3 $\bar{F}(G)/\Phi(G) \leq F^*(A/\Phi(G)) \leq \bar{F}(A/\Phi(G))$. Тогда $A/\Phi(G) = (Q\Phi(G)/\Phi(G))\bar{F}(A/\Phi(G))$. По лемме 2.5 $A/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда A действует f-стабильно на $\bar{F}(G)/\Phi(G)$ для максимального внутреннего локального экрана f формации $\mathfrak{F}$. Из $O_{p'}(G) = 1$ и теоремы 9.18 [2] следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Таким образом, $A \in \mathfrak{F}$. Значит, Q $\mathfrak{F}$-sn QN, следовательно, Q $\mathfrak{F}$-sn G. Итак, $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Получили противоречие. □

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ и $\pi = \varnothing$, получаются следующие результаты соответственно.

Следствие 3.5.1 [7, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.*

Следствие 3.5.2. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то класс групп с $\mathfrak{F}$-субнормальной единичной подгруппой является наследственной насыщенной формацией.*

Определение 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Для любого простого p обозначим через $h^*_\pi(p)$ следующий класс групп:*

$h^*_\pi(p) = (G \mid 1$ $\mathfrak{F}$-sn G, Q $\mathfrak{F}$-sn G и $Q \in h(p)$ для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G))$.

Если $\pi = \mathbb{P}$, то вместо $h^*_{\mathbb{P}}(p)$ будем писать $h^*(p)$.

Прямая проверка показывает, что $h^*_\pi(p)$ — формация (наследственная формация, если $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Напомним, ввиду теоремы Гашюца, Любезедер, Шмида [17, гл. IV, теорема 4.6] формация насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна.

Теорема 3.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} h_\pi^*(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = LF(f)$. Отметим, что $f(p)$ и $\mathfrak{X}$ являются наследственными формациями. По теореме 3.5 класс групп $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией. Заметим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$.

1. Докажем, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{X} \backslash \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. По лемме 1.9 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}}$, $\Phi(G) = 1$ и G — минимальная не $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$-группа.

Пусть N — неабелева подгруппа, тогда $C_G(N) = 1$. Из $G/C_G(N) \simeq \simeq G \in f(p)$ для любого $p \in \pi(N)$ следует, что $G \in h_\pi^*(p) \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Значит, N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p. Заметим, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $N = C_G(N)$. Так как $\Phi(G) = 1$ в группе G найдётся максимальная подгруппа M такая, что $M \cap N = 1$ и $G = = MN$. Из $G/N = G/C_G(N) \in f(p) = h_\pi^*(p)$ следует, что 1 $\mathfrak{F}$-sn G и G не является π'-группой.

Пусть P — произвольная силовская q-подгруппа группы G, $q \in \pi \cap \cap \pi(G)$. Предположим, что $PN < G$. Так как PN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N, по 2) леммы 2.1 PN $\mathfrak{F}$-sn G. Из $G \in \mathcal{M}(\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F})$ получаем, что $PN \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда P $\mathfrak{F}$-sn PN. Отсюда по 4) леммы 2.1 P $\mathfrak{F}$-sn G. Следовательно, $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, $G = NP$ для некоторой силовской q-подгруппы P группы G, $q \in \pi$. Поэтому M — силовская q-подгруппа G. Тогда $G/C_G(N) = G/N \simeq M \in h(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то G действует f-центрально на $G^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X} \backslash \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \varnothing$.

2. Докажем, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{X}$. По лемме 1.9 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{X}} = F(G)$, $\Phi(G) = 1$ и G — минимальная не $\mathfrak{X}$-группа.

Если G — π'-группа, то из $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $G \in h_\pi^*(p)$ для

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

любого $p \in \pi(G)$. Тогда $G \in f(p)$, а значит, $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.4 $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие.

Пусть P — произвольная силовская q-подгруппа G, $q \in \pi \cap \pi(G)$. Предположим, что $PN = G$. Из $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и леммы 2.5 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $PN < G$.

Предположим, что N абелева. Тогда N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого p, $G = MN$, где M — максимальная подгруппа группы G, и $M \cap N = 1$. Заметим, что $M \in \mathcal{M}(f(p))$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $M \in \mathcal{M}(h^*_\pi(p))$. Рассмотрим силовскую q-подгрупп Q группы M, $q \in \pi \cap \pi(M)$. Если $q \neq p$, то из $Q \in h^*_\pi(p)$ следует, что $Q \in h(p)$. Если $q = p$, то $Q \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Это означает, что $M \notin \mathcal{M}(f(p))$. Получили противоречие.

Таким образом, N — неабелева минимальная нормальная подгруппа G. Обозначим $R = PN$. Так как $R \neq G$, $R \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим группу $D = \cap\, C_R(H/K)$, где H/K пробегает все R-главные факторы группы N. Из $C_D(N) \leq C_G(N) = 1$ следует, что D можно рассматривать как некоторую группу автоморфизмов группы N, действующую тождественно на всех R-главных факторах группы N. По [2, теорема 9.8] группа D нильпотентна. При этом группа $D \trianglelefteq R$. Поэтому $D \cap N = 1$ и $D \leq C_R(N) \leq C_G(N) = 1$. Тогда $R/D \simeq R \in f(p)$ для любого $p \in \pi(N)$. Так как $R = PN$, силовская подгруппа $P \in h(p)$. Из $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ заключаем, что 1 $\mathfrak{F}$-sn G и P $\mathfrak{F}$-sn G. Тогда $G \simeq G/C_G(N) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие. Значит, $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{X} = \varnothing$. Итак, $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$.

Ясно, что f — внутренний экран $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p f(p)$, $p \in \mathbb{P}$. Обозначим $L = O_p(G)$. Тогда $G/L \in f(p) \neq \varnothing$. Поэтому $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $G/L \in h^*_\pi(p)$. Значит, L/L $\mathfrak{F}$-sn G/L. Из 2) леммы 2.1 и $L \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что 1 $\mathfrak{F}$-sn G.

Пусть $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G)$. Тогда $QL/L \in h(p)$ и QL/L $\mathfrak{F}$-sn G/L. Отсюда следует, что $Q \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$ и QL $\mathfrak{F}$-sn G. Если $q = p$, то Q $\mathfrak{F}$-sn G. Если $q \neq p$, то по лемме 1.7 $QL \in \mathfrak{F}$. По 4) леммы 2.1 Q $\mathfrak{F}$-sn G. Значит, $G \in h^*_\pi(p) = f(p)$. Отсюда и из $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p)$ получаем равенство $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$.

Ввиду леммы 1.6 f — максимальный внутренний локальный экран $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. □

Следствие 3.7.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ такой, что $f(p) = h^*_\pi(p)$ для любого*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

простого p.

Следствие 3.7.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\mathrm{w}\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} h^*(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Следствие 3.7.3. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $\mathrm{w}\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ такой, что $f(p) = h^*(p)$ для любого простого p.*

Теорема 3.8. *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ — наследственная насыщенная формация.*

Доказательство. По теореме 3.4 класс групп $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ — наследственная насыщенная формация. Согласно теореме 3.5 $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда по лемме 1.5 $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ является наследственной насыщенной формацией. □

Следствие 3.8.1 [10, следствие 2.3]. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.*

Теорема 3.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. Тогда $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = LF(g)$, где g — максимальный внутренний локальный экран формации $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ такой, что*

$$g(p) = \begin{cases} h^*_\pi(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi \setminus \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus (\pi \cup \pi(\mathfrak{F})). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = LF(g)$. Докажем, что $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{X}$. Заметим, что $g(p)$ и $\mathfrak{X}$ — наследственные формации.

1. Установим, что $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi \subseteq \mathfrak{X}$. Напомним, $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} = LF(f_1)$, где

$$f_1(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi \setminus \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus (\pi \setminus \pi(\mathfrak{F})). \end{cases}$$

По теореме 3.7 $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = LF(f)$, где

$$f(p) = \begin{cases} h^*_\pi(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Так как $f_1(p) \subseteq g(p)$ и $f(p) \subseteq g(p)$ для любого простого p, по лемме 1.8 следует, что $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Так как любая формация

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

замкнута относительно прямых произведений, $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. По 2) теоремы 3.4 формация $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi \subseteq \mathfrak{X}$.

2. Докажем, что формация $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Предположим, что $\mathfrak{X} \setminus (\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi) \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus (\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi)$. По лемме 1.9 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, $G/N \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ и $\Phi(G) = 1$.

Пусть N — абелева группа. Тогда N является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p и $N = C_G(N)$. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N) \in g(p)$. Поэтому $p \notin \mathbb{P} \setminus (\pi \cap \pi(\mathfrak{F}))$. Если $p \in \pi \setminus \pi(\mathfrak{F})$, то $G/C_G(N) \in g(p) = \mathfrak{N}_p$. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ и согласно 2) теоремы 3.4 группа $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Получили противоречие. Если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $G/C_G(N) = G/N \in g(p) = h^*_\pi(p) = f(p)$, где f — максимальный внутренний локальный экран $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Отсюда $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Получили противоречие.

Таким образом, N — неабелева минимальная нормальная подгруппа G и $C_G(N) = 1$. Отсюда и из $G/C_G(N) \simeq G \in g(p) \neq \varnothing$ для любого $p \in \pi(N)$ заключаем, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $g(p) = h^*_\pi(p)$ и $G \in h^*_\pi(p) \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$. Значит, $G \in \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Получили противоречие. Итак, $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{X}$.

Заметим, что $\mathfrak{N}_p g(p) = g(p)$ и ввиду 2) теоремы 3.4 $g(p) \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ для любого простого p. Из леммы 1.6 следует, что g — максимальный внутренний локальный экран $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. $\square$

Следствие 3.9.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F} = LF(f)$, где g — максимальный внутренний локальный экран формации $\overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$ такой, что*

$$g(p) = \begin{cases} h^*(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

В разрешимом случае отсюда получается теорема 3.5 из [10].

4. Формации $\mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$

Настоящий раздел посвящен проблеме 2.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, когда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/F(G)$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если $\pi(G) \not\subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то G является группой простого порядка ввиду наследственности $\mathfrak{F}$. Поэтому утверждение теоремы выполняется.

Предположим, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Допустим вначале, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $\bar{F}(G) = Soc(G) = N$. Можно считать, что $N \neq G$. Из $N \in \mathfrak{F}$ следует, что 1 $\mathfrak{F}$-sn N. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F} = \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ заключаем, что 1 $\mathfrak{F}$-sn G. Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа группы G, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Заметим, что PN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N. Тогда по 2) леммы 2.1 следует, что PN $\mathfrak{F}$-sn G. Предположим, что $PN < G$. Так как $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, подгруппа $PN \in \mathfrak{F}$. Поэтому P $\mathfrak{F}$-sn PN. По утверждению 4) леммы 2.1 подгруппа P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G = PN$ для некоторой силовской p-подгруппы P. Тогда $G/\bar{F}(G) \simeq P/P \cap N$ — p-группа для $p \in \pi \cap \pi(G)$.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Ввиду насыщенности $\mathfrak{F}$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ заключаем, что $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Из 1) леммы 1.3 $\bar{F}(G)/\Phi(G) = \bar{F}(G/\Phi(G))$. Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, по доказанному выше $G/\bar{F}(G) \simeq G/\Phi(G)/\bar{F}(G/\Phi(G))$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$. Необходимость доказана.

Пусть для любой группы $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ фактор-группа $G/\bar{F}(G)$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$. Докажем, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. По 2) теоремы 3.2 формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F} \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F}$. По теореме 3.5 $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией. По лемме 1.9 группа $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, при этом $N = G^{\mathfrak{F}} = \bar{F}(G)$. Из $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $G \neq \bar{F}(G)$. По условию $G/\bar{F}(G) = G/N$ — p-группа для некоторого $p \in \pi$. Тогда в G существует силовская p-подгруппа P такая, что $PN/N = G/N$. Поэтому $PN = G$. Так как $G \in \mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$, подгруппа P $\mathfrak{F}$-sn G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $P \leq M$ и $N = G^{\mathfrak{F}} \leq M$. Это означает, что $G = PN \leq M < G$. Получили противоречие. Итак, $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Достаточность доказана. □

Напомним, что группа G называется *примарной*, если $|G| = p^k$, где p — некоторое простое число, k — неотрицательное целое число.

Следствие 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, когда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\bar{F}(G)$ является примарной группой.*

Следствие 4.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F} = \overline{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$, когда для*

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны універсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\bar{F}(G)$ является примарной группой.

Напомним, что *формацией Шеметкова* называется формация $\mathfrak{F}$, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Следствие 4.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация Шеметкова. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Напомним, что $\mathfrak{F}$ называется *решеточной формацией* (см., например, [4, с. 248]), если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе. Для решеточной формации $\mathfrak{F}$ из строения минимальных не $\mathfrak{F}$-групп [22, теорема 2] получается следующий результат.

Следствие 4.1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначим через I любое подмножество из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, π_i и π_j — некоторые множества простых чисел. Обозначим $\mathfrak{F} = \cap_{(i,j)\in I}\mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}$, где (i,j) пробегает все пары из I.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — наследственная локальная формация, и пусть $\mathfrak{F} = \cap_{(i,j)\in I}\mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}$. Тогда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\bar{F}(G)$ является примарной группой.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Тогда очевидно, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j})$ для некоторой пары $(i,j) \in I$. Обозначим $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}$. Ввиду $\bar{F}(G)/\Phi(G) = \bar{F}(G/\Phi(G))$ достаточно доказать утверждение леммы для $\Phi(G) = 1$. Можно считать, что $G \neq \bar{F}(G)$. Тогда в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $G/N \in \mathfrak{H}$, $N = F(G)$ и $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Заметим, если $i = j$ или $N \in \mathfrak{X}_{\pi_i}$, то утверждение леммы выполняется. Пусть $i \neq j$ и $N \notin \mathfrak{X}_{\pi_i}$. Тогда ясно, что $N \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$.

Предположим, что $G \neq NQ$ для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(M)$. Легко показать, что для $R = QN$ подгруппа $O_{\pi_i}(R) = 1$. Из $R \in \mathfrak{H}$ следует, что $R \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$. Поэтому $M \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$. Но тогда из $G/N \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{X}_{\pi_j}\mathfrak{X}_{\pi_j} = \mathfrak{X}_{\pi_j} \subseteq \mathfrak{H}$. Получили противоречие.

Таким, образом, $G = NQ$ и утверждение леммы выполняется. □

Следствие 4.1.5 [16]. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — наследственная локальная формация, и пусть $\mathfrak{F} = \cap_{(i,j)\in I}\mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}$. Группа G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда любая силовская подгруппа из G K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Доказательство. Следует из теоремы 4.1 ввиду лемм 3.3 и 4.2.

Следствие 4.1.6 [16]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \cap_{(i,j)\in I}\mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$. *Группа* G $(\pi(G) \subseteq \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ *тогда и только тогда принадлежит формации* $\mathfrak{F}$, *когда любая силовская подгруппа из* G K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна в* G.

Следствие 4.1.7 [16]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *класс всех* π-*нильпотентных* (p-*нильпотентных*) *групп. Группа* G *принадлежит* $\mathfrak{F}$ *тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из* G K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна в* G.

Следствие 4.1.8 [16]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *класс всех* π-*замкнутых* (p-*замкнутых*) *групп. Группа* G *принадлежит* $\mathfrak{F}$ *тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из* G K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна в* G.

Следствие 4.1.9 [16]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *класс всех* π-*разложимых* (p-*разложимых*) *групп. Группа* G *принадлежит* $\mathfrak{F}$ *тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из* G K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна в* G.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Summary

For the set of primes π and hereditary saturated formation $\mathfrak{F}$ the properties of the class of groups, in which identity subgroup and all Sylow p subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal (K-$\mathfrak{F}$-subnormal) for $p \in \pi$, are studied. It is found that such class forms a hereditary saturated formation, and its maximal internal local screen is found. Criteria for belonging of the group of hereditary saturated formation is obtained.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Литература

1. *Hawkes T.* On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1969. V. 44. P. 243–250.

2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

3. *Kegel O. H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd. 30, N 3. S. 225–228.

4. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

5. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск.: Бел. навука, 2003.

6. *Васильев А. Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 31–39.

7. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. N 4 (9). С. 86–91.

8. *Васильева Т. И., Прокопенко А. И.* Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. N 3. С. 25–30.

9. *Вегера А. С.* О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2012. N 6 (75). С. 154–158.

10. *Вегера А. С.* О конечных группах с заданными K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2014. N 3 (20). С. 53–57.

11. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, N 6. С. 1270–1281.

12. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам // Проблемы физики, математики и техники. 2010. N 2. (3) С. 21–27.

13. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95. N 4. С. 517–528.

14. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche mat. 2013. V. 62. P. 307–322.

15. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Heliel A. A., Al-Shomrani M. M.* Some Results on Products of Finite Groups // Bull. Malays. Math.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Sci. Soc. 2015. DOI 10.1007/s40840-015-0111-7.

16. *Семенчук В. Н., Шевчук С. Н.* Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Матем. заметки. 2011. Т. 89, N 1. С. 104–108.

17. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

18. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen. IIa // Pub. Mat. UAB. 1985. V. 29, N 2–3. P. 39–76.

19. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Сыроквашин А. В.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2012. N 2 (11). С. 62–64.

20. *Мурашко В. И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, N 6. С. 1353–1367.

21. *Huppert B., Blackburn N.* Finite Groups. III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.

22. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: ИМ АН Украины, 1993. С. 27–54.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
1 Предварительные сведения 4
2 Свойства обобщенно субнормальных подгрупп 7
3 Свойства классов групп $w_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{w}_\pi\mathfrak{F}$ 8
4 Формации $\mathfrak{F}$, для которых $w_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ 16
Литература 21

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны універсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Научное издание

ВЕГЕРА Артем Сергеевич,
ВАСИЛЬЕВ Александр Федорович,
ВАСИЛЬЕВА Татьяна Ивановна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

Препринт № 1

В авторской редакции

Подписано в печать 20.05.2015. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 20 экз. Заказ 391.

5580-00

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ