

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

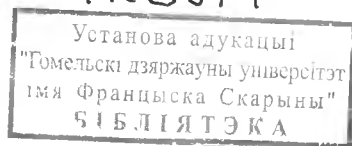
А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, В. А. ВАСИЛЬЕВ, Т. И. ВАСИЛЬЕВА

О ПЕРМУТИЗАТОРАХ ПОДГРУПП
В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

ПРЕПРИНТ № 1,

апрель 2013

УК 8974



Гомель
ГГУ им.Ф.Скорины
2013

2017

УДК 512.542
ББК 22.144.12
В 191

Рецензенты:

доктор физико-математических наук В. М. Селькин;
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-техническим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Васильев, А. Ф.

В 191 О пермутизаторах подгрупп в конечных группах [Текст] / А. Ф. Васильев, В. А. Васильев, Т. И. Васильева. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. — 16 с. — (Препринт / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 1).

Пусть H — подгруппа группы G . Пермутизатором H в G называется подгруппа $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle$. Будем называть H : 1) пермутируемой в G , если $P_G(H) = G$; 2) сильно пермутируемой в G , если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $H \subseteq U \subseteq G$. Изучены конечные группы с заданными системами пермутируемых и сильно пермутируемых подгрупп. Найдены новые критерии π -сверхразрешимости и π -сверхразрешимости групп.

УДК 512.542
ББК 22.144.12

- © Васильев А. Ф., Васильев В. А.,
Васильева Т. И.. 2013
© УО «Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины», 2013

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие нормализатора подгруппы играет центральную роль при изучении групп. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна, если нормализатор любой ее силовой подгруппы совпадает с группой, или группу можно представить в виде произведения ее нильпотентных подгрупп, нормализаторы которых совпадают с группой. Естественным обобщением нормализатора подгруппы является понятие пермутизатора подгруппы, введенное Дескинсом и Венцке в [1, с. 27].

Напомним [1], пермутизатором подгруппы H в группе G называется подгруппа $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle$.

В [1] начато исследование влияния свойств пермутизаторов для различных систем подгрупп на строение группы. В работах [1–5] с одной стороны изучались группы с пермутизаторным свойством, т.е. группы G , у которых $H < P_G(H)$ для любой собственной подгруппы H из G , с другой стороны исследовались группы с заданными системами подгрупп (максимальных, почти максимальных, свободных от четверной группы Клейна и др.), пермутизаторы которых совпадают с группой.

Введем следующее

Определение. Подгруппу H группы G будем называть:

- 1) пермутулируемой в G , если $P_G(H) = G$;
- 2) сильно пермутулируемой в G , если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $H \subseteq U \subseteq G$.

Существуют группы, которые обладают пермутулируемыми, но не сильно пермутулируемыми подгруппами. Например, легко проверить, что в группе $G = PSL(2, 7)$ силовая 3-подгруппа Z_3 является пермутулируемой в G . Так как $Z_3 \subseteq U \subseteq G$, где U изоморфна знакопеременной группе A_4 , и $P_U(Z_3) = Z_3$, то Z_3 не сильно пермутулируема в G .

В работе исследуются свойства групп с заданными системами пермутулируемых и сильно пермутулируемых подгрупп. Получены новые критерии w -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп.

1. Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [6, 7]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через $|G|$ обозначается порядок группы G ; $\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей порядка группы G ; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; π — некоторое множество простых чисел; $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; $\text{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p -подгрупп группы G ;

$\text{Syl}(G)$ — множество всех силовских подгрупп группы G ; $\text{Core}_G(M)$ — ядро подгруппы M в G , т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G ; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга; $F_p(G)$ — p -нильпотентный радикал группы G , т.е. произведение всех нормальных p -нильпотентных подгрупп группы G ; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех nilпотентных групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, p_i — простое число, называется дисперсивной по Оре [6, с. 251], если $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Подгруппа Картера группы G — это nilпотентная подгруппа H такая, что $N_G(H) = H$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия: 1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) наследственной, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы; 2) насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп $\{G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для любого } p \in \pi(G)\}$.

Лемма 1.1 [6, лемма 3.9]. Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p -подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.

Лемма 1.2 [6, лемма 1.2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, K — нормальная подгруппа группы G . Тогда $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$.

Теорема 1.3 [7, гл. А, теорема 2.7 (ii)]. Пусть G — разрешимая группа. Тогда $F(G)/\Phi(G) = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$.

Определение 1.4 [8]. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной в G (обозначается $H \mathbb{P}\text{-sn } G$), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Лемма 1.5 [9, леммы 3.1 и 3.4]. Пусть H — подгруппа группы G , $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathbb{P}\text{-sn } G$, то $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-sn } N$ и $HN/N \mathbb{P}\text{-sn } G/N$;
- 2) если $N \subseteq H$ и $H/N \mathbb{P}\text{-sn } G/N$, то $H \mathbb{P}\text{-sn } G$;
- 3) если $HN_i \mathbb{P}\text{-sn } G$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2) \mathbb{P}\text{-sn } G$;
- 4) если $H \mathbb{P}\text{-sn } K$ и $K \mathbb{P}\text{-sn } G$, то $H \mathbb{P}\text{-sn } G$;

- 5) если $H \mathbb{P}\text{-sn } G$, то $H^x \mathbb{P}\text{-sn } G$ для любого $x \in G$;
- 6) если $G^u \subseteq H$, то $H \mathbb{P}\text{-sn } G$;
- 7) если $G \in \mathfrak{S}$, $H \mathbb{P}\text{-sn } G$, K — подгруппа из G , то $(H \cap K) \mathbb{P}\text{-sn } K$;
- 8) если $G \in \mathfrak{S}$, $H_i \mathbb{P}\text{-sn } G$, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2) \mathbb{P}\text{-sn } G$.

Группа G называется w -сверхразрешимой [8], если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$ -субнормальной в G .

Через $w\Omega$ обозначается класс всех w -сверхразрешимых групп. Приведем некоторые свойства w -сверхразрешимых групп.

Предложение 1.6 [8, предложение 2.8]. Любая w -сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.

Теорема 1.7 [8, теоремы 2.7 и 2.10]. Класс $w\Omega$ является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экрани f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} | \text{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого числа p .

Теорема 1.8 [8, теорема 2.13]. Любая бипримарная подгруппа w -сверхразрешимой группы является сверхразрешимой.

Теорема 1.9 [1, гл. 1, теорема 1.4]. Пусть H/K — главный p -фактор группы G . Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\text{Aut}_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$.

Подгруппа H группы G называется: 1) пронормальной в G , если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$; 2) абнормальной в G , если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Лемма 1.10 [6, лемма 17.1]. Если подгруппа H пронормальна в G , то $N_G(H)$ абнормальна в G .

Лемма 1.11 [6, лемма 17.2]. Пусть H — подгруппа группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) H абнормальна в G ;
- 2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $H \subseteq U \cap U^x$ всегда следует $x \in U$;
- 3) H пронормальна в G и $U = N_G(U)$ для любой подгруппы $U \supseteq H$;
- 4) H пронормальна в G и $H = N_G(H)$.

Лемма 1.12 [6, лемма 17.5]. Пусть H — подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H пронормальна в G , то H пронормальна в любой ее содержащей подгруппе из G ;
- 2) если $N \trianglelefteq G$ и $N \subseteq H$, то H пронормальна в G , тогда и только тогда, когда H/N пронормальна в G/N ;
- 3) если $N \trianglelefteq G$ и H пронормальна в G , то HN/N пронормальна в G/N .

Лемма 1.13 [12, лемма 2]. Пусть группа $G = AB$, A и B — нильпотентные подгруппы и G имеет минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) \neq G$. Тогда

- 1) $A \cap B = 1$;
- 2) $N \subseteq A \cup B$;
- 3) если $N \subseteq A$, то A — p -группа для некоторого простого числа p и B — p' -группа.

Группа G обладает свойством E_π , если G имеет по крайней мере одну холлову π -подгруппу; обладает свойством D_π , если G имеет в точности один класс сопряженных холловых π -подгрупп и каждая π -подгруппа из G содержится в некоторой холловой π -подгруппе из G .

Лемма 1.14 [13]. Пусть $G = AB$ — группа, обладает свойством D_π , и пусть A и B обладают свойством E_π . Тогда существуют холловы π -подгруппы A_π и B_π из A и B соответственно такие, что $A_\pi B_\pi = B_\pi A_\pi$ — холлова π -подгруппа из G .

2. Свойства пермутизаторов подгрупп

Лемма 2.1. Пусть H — подгруппа группы G . Тогда

1) $P_U(H) \subseteq P_G(H)$ для любой подгруппы U группы G такой, что $H \subseteq U$;

2) $P_G(H)^g = P_G(H^g)$ для любого элемента $g \in G$;

3) $N_G(H) \subseteq P_G(H)$;

4) если $N \trianglelefteq G$, то $P_G(H)N/N \subseteq P_{G/N}(HN/N)$;

5) если $N \trianglelefteq G$ и $N \subseteq H$, то $P_{G/N}(H/N) = P_G(H)/N$.

Доказательство. 1) Утверждение следует из определения $P_G(H)$.

2) Пусть $g \in G$. Допустим, что $P_G(H) = \langle L \rangle$, где $L = \{x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle\}$, и $P_G(H^g) = \langle K \rangle$, где $K = \{y \in G \mid \langle y \rangle H^g = H^g \langle y \rangle\}$. Ясно, что $P_G(H)^g = \langle L^g \rangle$.

Возьмем любой $z \in L^g$. Тогда $z = x^g$ для некоторого $x \in L$. Из $\langle x^g \rangle H^g = \langle x \rangle^g H^g = (\langle x \rangle H)^g = (H \langle x \rangle)^g = H^g \langle x^g \rangle$ получаем, что $L^g \subseteq K$.

Рассмотрим любой $y \in K$. Из $y^{g^{-1}} \in K^{g^{-1}}$ получаем, что $\langle y^{g^{-1}} \rangle H = \langle y \rangle^{g^{-1}} (H^g)^{g^{-1}} = (\langle y \rangle H^g)^{g^{-1}} = (H^g \langle y \rangle)^{g^{-1}} = H \langle y^{g^{-1}} \rangle$. Отсюда $K \subseteq L^g$.

Значит, $P_G(H)^g = \langle L^g \rangle = \langle K \rangle = P_G(H^g)$.

Утверждения 3)-5) — это лемма 2.4 из [5]. Лемма доказана.

Легко проверяется следующая

Лемма 2.2. Пусть H — подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда

1) если H пермутируема в G , то HN/N пермутируема в G/N ;

2) если H пермутируема в G , то HN пермутируема в G ;

3) если $N \subseteq H$, то H пермутируема в G , тогда и только тогда, когда H/N пермутируема в G/N ;

4) если H сильно пермутируема в G , то HN/N сильно пермутируема в G/N .

Лемма 2.3. Пусть группа $G = HQ$, где $H \in \text{Syl}_p(G)$, p — наибольший простой делитель $|G|$, Q — циклическая подгруппа из G . Тогда G p -замкнута.

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Так как G является произведением нильпотентных подгрупп, по известной теореме Кегеля-Виландта [10], [11] G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда G/N p -замкнута. Так как класс всех p -замкнутых групп является насыщенной формацией, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, $M \cap N = 1$, $\text{Core}_G(M) = 1$ и $N = C_G(N)$. Если N — p -группа, то $NN/N = H/N \in \text{Syl}_p(G/N)$. Откуда $H \trianglelefteq G$. Получили противоречие с выбором G . Пусть N — q -группа, $q \neq p$. Ввиду теоремы Силова $H^q \subseteq M$ для некоторого $g \in G$ и $N \subseteq Q$. Тогда $|N| = q$. Отсюда подгруппа $M \simeq G/C_G(N)$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut}(Z_q) \simeq Z_{q-1}$. Это противоречит тому, что p — наибольший делитель $|G|$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $H \in \text{Syl}_p(G)$, p — наибольший простой делитель $|G|$. Если H пермутируема в G , то G p -замкнута.

Доказательство. Пусть x — любой элемент группы G такой, что $\langle x \rangle H = H \langle x \rangle$. Тогда $\langle x \rangle H$ — подгруппа из G . По лемме 2.3 $H \trianglelefteq \langle x \rangle H$. Поэтому $\langle x \rangle \subseteq N_G(H)$ и $G = P_G(H) \subseteq N_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Если любая силовская подгруппа группы G пермутируема в G , то G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Проведем индукцией по $|G|$. Можно считать, что $|\pi(G)| > 1$. Пусть $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, где $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$, p_i — простые числа, $i = 1, 2, \dots, k$. Для $P_1 \in \text{Syl}_{p_1}(G)$ по лемме 2.4 $P_1 \trianglelefteq G$. Любая силовская p_i -подгруппа фактор-группы G/P_1 имеет вид $P_i P_1/P_1$, где $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 2, \dots, k$. Ввиду 1) леммы 2.2 $P_i P_1/P_1$ пермутируема в G/P_1 . По индукции G/P_1 дисперсивна по Оре. Отсюда G дисперсивна по Оре. Лемма доказана.

Лемма 2.6. Если G — сверхразрешимая группа, то любая пронормальная в G подгруппа пермутируема в G .

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathcal{U}$ и $P_G(H) \neq G$ для некоторой ее пронормальной подгруппы H .

Допустим, что $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi \in \mathcal{U}$, по 3) леммы 1.12 $H\Phi/\Phi$ пронормальна в G/Φ . Из выбора G следует, что $P_{G/\Phi}(H\Phi/\Phi) = H\Phi/\Phi$. Ввиду 5) леммы 2.1 заключаем, что $P_G(H\Phi) = G$. Поскольку $P_G(H) \neq G$ в G найдется элемент x такой, что $x \notin P_G(H)$ и $\langle x \rangle H\Phi = H\Phi \langle x \rangle$. Тогда $R = \langle x \rangle H\Phi$ — подгруппа группы G . Если $R \neq G$, то из

выбора G следует, что $P_R(H) = R$. Поэтому $x \in R = P_R(H) \subseteq P_G(H)$. Получили противоречие с $x \notin P_G(H)$. Значит, $R = \langle x \rangle H \Phi = G = \langle x \rangle H$. Поэтому $x \in P_G(H)$. Получили противоречие с выбором x .

Таким образом, $\Phi(G) = 1$. Группа $G \in \mathfrak{U}$, поэтому ее коммутант $G' \in \mathfrak{N}$. Из выбора G следует, что $N_G(H) \neq G$. Из абнормальности $N_G(H)$ в G получаем, что $G = G'N_G(H) = F(G)N_G(H)$. По теореме 1.3 $F(G)$ совпадает с цоклем группы G , т. е. $F(G) = N_1N_2 \cdots N_k$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы G для $i = 1, 2, \dots, k$. Из сверхразрешимости G следует, что N_i — циклическая подгруппа простого порядка. Из $N_iH = HN_i$ получаем, что $N_i \subseteq P_G(H)$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$. Поэтому $F(G) \subseteq P_G(H)$. Но тогда $G = F(G)N_G(H) \subseteq P_G(H)$. Получили противоречие с $P_G(H) \neq G$. Лемма доказана.

Следствие 2.6.1. Если G — сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G пермутируема в G .

Следствие 2.6.2. Если группа G сверхразрешима, то любая подгруппа Картера из G пермутируема в G .

Следствие 2.6.3. Если группа G сверхразрешима, то для любого множества простых чисел π любая π -подгруппа из G пермутируема в G .

Сверхразрешимая группа может обладать не пермутируемыми в ней подгруппами.

Пример 2.7. Пусть $G = (Z_4 \times Z_2)Z_2 = \langle a, b | a^4 = b^4 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = 1 \rangle$ — группа порядка 16. Тогда подгруппа $H = \langle ba \rangle$ не пермутируема в G , так как $P_G(H)$ есть элементарная абелева 2-группа порядка 8.

Лемма 2.8. Пусть G — разрешимая группа, $H \in \text{Syl}_p(G)$ и $H \mathbb{P}\text{-sn } G$. Тогда H пермутируема в G .

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа наименьшего порядка, в которой имеется $H \in \text{Syl}_p(G)$, $H \mathbb{P}\text{-sn } G$ и $P_G(H) \neq G$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . По 1) леммы 1.5 $NN/N \mathbb{P}\text{-sn } G/N$. По выбору G силовская p -подгруппа NN/N пермутируема в G/N . По 3) леммы 2.2 NN пермутируема в G . Поэтому N q -группа для некоторого простого $q \neq p$. Из $H \mathbb{P}\text{-sn } G$ следует, что в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $H \subseteq M$ и $|G : M|$ простое число. По 7) леммы 1.5 $H \mathbb{P}\text{-sn } M$. Из выбора G следует, что $M = P_M(H) \subseteq P_G(H) \neq G$. Поэтому $M = P_G(H)$. Так как $G = P_G(HN)$, в G найдется x такой, что $x \notin M$ и $\langle x \rangle HN = HN \langle x \rangle$. Отсюда и из $P_G(H) = M$ следует, что $G = \langle x \rangle HN$. Если $N \subseteq \Phi(G)$, то $G = \langle x \rangle H$. Значит, $x \in P_G(H) = M$, что противоречит $x \notin M$.

Итак, $N \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда в G существует максимальная подгруппа W

такая, что $N \not\subseteq W$ и $G = NW$. Отсюда $|G : W|$ — q -число и $H \subseteq W^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда $W^g = P_{W^g}(H) \subseteq P_G(H) = M$ и $G = NM$.

Допустим, что $HN \neq G$. Тогда из выбора G заключаем, что $HN = P_{HN}(H) \subseteq P_G(H) = M$. Получили противоречие $G = NM \subseteq M \neq G$.

Значит, $HN = G$. Из $N \cap M = 1$ следует, что $H = M$. Тогда $|N| = q$. Ввиду $HN = NH$ получаем, что $N \subseteq P_G(H) = M$. Откуда $G \subseteq M \neq G$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 2.8.1. Если G — w -сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G пермутируема в G .

Заметим, пермутируемость в группе силовских подгрупп не является достаточным условием сверхразрешимости группы. Это следует из примера 1 [8], в котором рассматривается w -сверхразрешимая, но не сверхразрешимая группа.

3. Критерии w -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп

Теорема 3.1. Группа G w -сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа группы G сильно пермутируема в G .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid \text{любая силовская подгруппа группы } G \text{ сильно пермутируема в } G)$. Если $G \in w\mathfrak{U}$, то ввиду следствия 2.8.1 и наследственности $w\mathfrak{U}$ любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G . Поэтому $w\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus w\mathfrak{U}$. Так как $P_G(H) = G$ для любой силовской подгруппы H группы G , то по лемме 2.5 G дисперсивна по Оре. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Возьмем любую силовскую p -подгруппу R/N группы G/N . В G найдется $P \in \text{Syl}_p(G)$ такая, что $R/N = PN/N$. Из $G \in \mathfrak{F}$ и 4) леммы 2.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/N \in w\mathfrak{U}$. Так как $w\mathfrak{U}$ — насыщенная формация по теореме 1.7, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. Пусть $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, где p_i — простые числа, $i = 1, 2, \dots, k$ и $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Обозначим через P_i силовскую p_i -подгруппу группы G , $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $N \subseteq P_1$ и $P_1 \triangleleft G$. Заметим, что $P_1 \mathbb{P}\text{-sn } G$. Обозначим $H_i = P_i P_1$, $i \in \{2, \dots, k\}$.

Если $H_i \neq G$ для любого $i \in \{2, \dots, k\}$, то $H_i \in \mathfrak{F}$. По выбору G группа H_i w -сверхразрешима. Из наследственности формации $w\mathfrak{U}$ следует, что $P_i N \in w\mathfrak{U}$. Поэтому $P_i \mathbb{P}\text{-sn } P_i N$. Из $G/N \in w\mathfrak{U}$ и 2) леммы 1.5 следует, что $P_i N \mathbb{P}\text{-sn } G$. По 4) леммы 1.5 получаем, что $P_i \mathbb{P}\text{-sn } G$. Отсюда следует, что $G \in w\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G .

Значит, $H_i = G$ для некоторого i из $\{2, 3, \dots, k\}$. Из $\Phi(G) = 1$ следует, что $G = MN$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G , $M \cap N = 1$, $N = C_G(N)$. Из $G/N \simeq M$ и леммы 1.1 следует,

что $P_1 \cap M = 1$. Поэтому $N = P_1$ и $M = P_i$. Ввиду того, что $P_G(P_i) = G$, найдется элемент y группы G такой, что $y \notin P_i$, $\langle y \rangle P_i = P_i \langle y \rangle$. Тогда $G = \langle y \rangle P_i$. Откуда следует, что $|N| = p_1$. Значит, G сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G . Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда для любого множества простых чисел π любая холлова π -подгруппа из G пермутируема в G .*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid \text{для любого множества простых чисел } \pi \text{ любая холлова } \pi\text{-подгруппа из } G \text{ пермутируема в } G)$. Из следствия 2.6.3 вытекает, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. Тогда любая силовская подгруппа из G пермутируема в G . По лемме 2.5 G дисперсивна по Оре. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Для любого множества простых чисел π возьмем любую холлову π -подгруппу K/N фактор-группы G/N . Из разрешимости G следует, что $K/N = SN/N$ для некоторой холловой π -подгруппы S группы G . Из $G \in \mathfrak{F}$ и 1) леммы 2.2 заключаем, что $K/N = SN/N$ пермутируема в G/N . Из выбора G следует, что $G/N \in \mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, $M \cap N = 1$, $N = C_G(N)$. Ввиду $P \trianglelefteq G$ для $P \in \text{Syl}_p(G)$ (p — наибольший простой делитель $|G|$) получаем, что $N \subseteq P$. Из $P \cap M \trianglelefteq M$ и леммы 1.1 следует, что $P \cap M = 1$. Поэтому $N = P$ и M — холлова ω -подгруппа для $\omega = \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда M пермутируема в G . Поэтому найдется $x \in G$, $x \notin M$ такой, что $\langle x \rangle M = G$. Тогда силовская p -погруппа группы $\langle x \rangle$ является силовской p -погруппой группы G . Следовательно, $|N| = p$. Отсюда $M \simeq G/C_G(N)$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut}(Z_p) \simeq Z_{p-1}$. Поэтому $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие с выбором G . Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая силовская подгруппа группы G пермутируема в G .*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid \text{группа } G \text{ метанильпотентна и любая силовская подгруппа группы } G \text{ пермутируема в } G)$. Если группа G сверхразрешима, то ее коммутант G' нильпотентен. Отсюда и из следствия 2.6.1 получаем, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. Из $G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$ и $G/G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$ следует разрешимость G . Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Из леммы 1.2 и нильпотентности $G^{\mathfrak{N}}$ следует, что $(G/N)^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}N/N \simeq G^{\mathfrak{N}}/G^{\mathfrak{N}} \cap N$ нильпотентен.

Для $R/N \in \text{Syl}_p(G/N)$ (p — любое простое число из $\pi(G)$) найдется такая $P \in \text{Syl}_p(G)$, что $R/N = PN/N$. Ввиду 1) леммы 2.2 R/N пермутируема в G/N . Из выбора G получаем, что G/N сверхразрешима. Из насыщенности формации $\mathcal{U}$ заключаем, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$, где M — максимальная подгруппа группы G , $N \cap M = 1$, $\text{Core}_G(M) = 1$. Так как N — элементарная абелева p -группа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $N = C_G(N)$, используя лемму 1.1, получаем, что $N = G^N = F(G)$ и $G/N \simeq M$ — нильпотентная p' -группа. По лемме 2.5 G дисперсивна по Оре. Тогда для $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ (p_i — простые числа, $i = 1, 2, \dots, k$ и $p_1 > p_2 > \dots > p_k$), силовская p_1 -подгруппа $P_1 \trianglelefteq G$. Отсюда следует, что $p = p_1$ и $N = P_1$.

Пусть $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, $P_i \subseteq M$, $i \in \{2, 3, \dots, k\}$. Так как $P_G(P_i) = G$, в G найдется элемент $x \in G$ такой, что $\langle x \rangle P_i = P_i \langle x \rangle$ и $x \notin M$. Если $\langle x \rangle$ — p_1' -группа, то $\langle x \rangle P_i$ также является p_1' -группой. Из разрешимости G следует, что $\langle x \rangle P_i \subseteq M^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда $\langle x \rangle^{g^{-1}} P_i^{g^{-1}} \subseteq M$. Так как $P_i^{g^{-1}}$ — силовская p_i -подгруппа в нильпотентной группе M , получаем равенство $P_i^{g^{-1}} = P_i$. Значит, $g^{-1} \in N_G(P_i) = M$. Поэтому $g \in M$. Отсюда $x \in \langle x \rangle P_i \subseteq M^g = M$. Получили противоречие с $x \notin M$.

Таким образом, $\langle x \rangle$ — не p_1' -группа. Пусть $\langle z \rangle \in \text{Syl}_{p_1}(\langle x \rangle)$. Ясно, что $\langle z \rangle \in \text{Syl}_{p_1}(\langle x \rangle P_i)$ и $\langle z \rangle = P_1 \cap \langle x \rangle P_i \trianglelefteq \langle x \rangle P_i$. Поэтому $\langle z \rangle P_i$ — подгруппа в $\langle x \rangle P_i$. Так как $\langle z \rangle \subseteq P_1$ и P_1 — элементарная абелева p_1 -группа, заключаем, что $|\langle z \rangle| = p_1$.

Обозначим $R_i = \langle z \rangle P_i$. Подгруппа P_i максимальна в R_i . Из $N_G(P_i) = M$ следует, что $\langle z \rangle \not\subseteq N_{R_i}(P_i)$. Поэтому $N_{R_i}(P_i) = P_i$. Покажем, что $C_i = C_{R_i}(\langle z \rangle) \cap P_i = 1$. Допустим, что $C_i \neq 1$. Тогда $\langle z \rangle \subseteq N_G(C_i)$ и $P_i \subseteq N_{R_i}(C_i) \subseteq N_G(C_i)$. Так как M нильпотентна, получаем, что $P_j \subseteq N_G(C_i)$ для любого $j \in \{2, 3, \dots, k\}$, $j \neq i$. Значит, $M \subseteq N_G(C_i)$ и $M \neq N_G(C_i)$. Отсюда следует, что $C_i \trianglelefteq G$. Поэтому $1 \neq C_i \subseteq \text{Core}_G(M) = 1$. Получили противоречие. Итак, $C_i = C_{R_i}(\langle z \rangle) \cap P_i = 1$. Тогда $P_i \simeq R_i / \langle z \rangle = R_i / C_{R_i}(\langle z \rangle)$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut}(Z_{p_1}) \simeq Z_{p_1-1}$. Отсюда ввиду нильпотентности M получаем, что M — абелева группа экспоненты, делящей $p_1 - 1$. Из $M \simeq G/N = G/C_G(N)$ по теореме 1.9 заключаем, что $|N| = p_1$. Поэтому G сверхразрешима. Это противоречит выбору G . Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая пронормальная в группе G подгруппа пермутируема в G .*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid \text{любая пронормальная в группе } G \text{ подгруппа пермутируема в } G)$. Если G — сверхразрешимая группа, то

ввиду леммы 2.6 $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. Так как всякая силовская подгруппа группы G пронормальна в G , ввиду леммы 2.5 G дисперсивна по Оре. Поэтому G разрешима.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Возьмем любую пронормальную в G/N подгруппу K/N . По 2) леммы 1.12 K пронормальна в G . Тогда $P_G(K) = G$. Ввиду 3) леммы 2.2 K/N пермутируема в G/N . Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$, а значит, $G/N \in \mathfrak{U}$. Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$. В G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$, $\text{Core}_G(M) = 1$, $N = C_G(N)$. Из дисперсивности по Оре группы G следует, что $N \subseteq P \in \text{Syl}_p(G)$, где $P \trianglelefteq G$, p — наибольший простой делитель $|G|$. Ввиду леммы 1.1 $P \cap M = 1$. Значит, $N = P \in \text{Syl}_p(G)$.

Пусть q — наибольший простой делитель $|M|$. Из дисперсивности по Оре M получаем, что $M = N_G(Q)$ для $Q \in \text{Syl}_q(M)$. Из $Q \in \text{Syl}_q(G)$ следует, что Q — пронормальная подгруппа в G . Ввиду лемм 1.10 и 1.11 $N_G(Q)$ — пронормальная в G подгруппа. Тогда $P_G(M) = P_G(N_G(Q)) = G$. Из $M \neq G$ следует, что найдется $x \in G$ такой, что $\langle x \rangle M = M \langle x \rangle$ и $x \notin M$. Поэтому $G = \langle x \rangle M$ и силовская p -подгруппа из $\langle x \rangle$ является силовской p -подгруппой группы G . Значит, $|N| = p$. Тогда подгруппа $M \simeq G/N$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut}(Z_p) \simeq Z_{p-1}$. Поэтому $G \in \mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G . Теорема доказана.

Теорема 3.5. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$ — произведение нильпотентных подгрупп A, B таких, что A и B пермутируемы в G .*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid \text{группа } G = AB \text{ — произведение нильпотентных подгрупп } A, B \text{ таких, что } A \text{ и } B \text{ пермутируемы в } G)$. Если G сверхразрешима, то $G = F(G)H$, где H — подгруппа Картера из G . Подгруппы $F(G)$ и H нильпотентны. Ввиду $F(G) \trianglelefteq G$ и следствия 2.6.2 заключаем, что $P_G(F(G)) = G$ и $P_G(H) = G$. Поэтому $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. По известной теореме Кегеля-Виландта [10], [11] G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Из $AN/N \simeq A/A \cap N \in \mathfrak{N}$, $BN/N \simeq B/B \cap N \in \mathfrak{N}$ и 1) леммы 2.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{U}$. Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G , $\Phi(G) = 1$. В G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$, $\text{Core}_G(M) = 1$. Подгруппа $N = C_G(N)$ и N — элементарная абелева p -группа для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.13, если $N \subseteq A$, то A — p -группа и B — p' -группа.

Рассмотрим любой $x \in G$, для которого $\langle x \rangle B = B \langle x \rangle$ и $x \notin B$. Пусть $R = \langle x \rangle B$ и $\langle x \rangle = \langle z \rangle \langle y \rangle$, где $\langle z \rangle \in \text{Syl}_p(\langle x \rangle)$ и $\langle y \rangle$ — холлова p' -подгруппа из $\langle x \rangle$. Ясно, что $\langle x \rangle$ не является p' -группой. По лемме 1.14 $\langle y \rangle B$ есть холлова p' -подгруппа группы R . Поэтому $\langle y \rangle \subseteq B$ и $R = \langle z \rangle B$. Пусть $B = P_1 P_2 \dots P_k$, где $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(B)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Возьмем любое $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. По лемме 1.14 для $\pi_i = \{p, p_i\}$ в R существует холлова π_i -подгруппа $\langle z \rangle P_i = P_i \langle z \rangle$. Тогда $\langle x \rangle P_i = \langle z \rangle \langle y \rangle P_i = \langle z \rangle P_i \langle y \rangle = P_i \langle z \rangle \langle y \rangle = P_i \langle x \rangle$. Следовательно, $x \in P_G(P_i)$. Подгруппа $B \subseteq N_G(P_i) \subseteq P_G(P_i)$. Отсюда $G = P_G(B) \subseteq P_G(P_i)$, т.е. $G = P_G(P_i)$. Так как $A \in \text{Syl}_p(G)$, $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, ввиду 2) леммы 2.1 заключаем, что $G = P_G(H)$ для любой силовой подгруппы H группы G . По лемме 2.5 группа G дисперсивна по Оре. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и N — p -группа, получаем, что p — наибольший простой делитель $|G|$. Тогда из $N \subseteq A \in \text{Syl}_p(G)$ следует, что $A \triangleleft G$. По лемме 1.1 $G/C_G(N) = G/N \simeq M$ не имеет неединичных нормальных p -подгрупп. Поэтому $A \cap M = 1$ и $N = A$. Из $G = AB = NB$ следует, что B — максимальная подгруппа группы G . Ввиду $B \neq G$ и $P_G(B) = G$, найдется $g \in G$ такой, что $\langle g \rangle B = B \langle g \rangle$ и $g \notin B$. Тогда $G = \langle g \rangle B$. Поэтому A — циклическая группа и $|A| = p$. Итак, факторгруппа $G/C_G(A) = G/A$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut}(Z_p) \simeq Z_{p-1}$. Следовательно, G — сверхразрешимая группа. Получили противоречие с выбором G . Теорема доказана.

Следствие 3.5.1. Пусть $G = AB$ — произведение своих силовских подгрупп A и B . Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда A и B пермутируемы в G .

Следствие 3.5.2. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда группа $G = F(G)H$, где H — подгруппа Картера и H пермутируема в G .

Summary

Let H be a subgroup of a group G . The permutizer of H in G is the subgroup $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle$. A subgroup H of a group G is called: 1) permutizable in G if $P_G(H) = G$; 2) strongly permutizable in G if $P_U(H) = U$ whenever $H \leq U \leq G$. Finite groups with permutizable and strongly permutizable in G pronormal subgroups are studied. New characterizations of w -supersoluble and supersoluble groups are received.

Литература

- [1] Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. — Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. — 240 p.
- [2] Beidleman, J.C. On finite groups satisfying the permutizer condition / J.C. Beidleman, D.J.S. Robinson // J. Algebra. — 1997. — Vol. 191, № 2. — P. 686–703.
- [3] Zhang, J. A note on finite groups satisfying the permutizer condition / J. Zhang // Sci. Bull. — 1986. — Vol. 31. — P. 363–365.
- [4] Liu, X. Implications of permutizers of some subgroups in finite groups / X. Liu, Ya. Wang // Comm. Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 559–565.
- [5] Qiao, Sh. Influence of permutizers of subgroups on the structure of finite groups / Sh. Qiao, G. Qian, Ya. Wang // J. Pure and Applied Algebra. — 2008. — Vol. 212, № 10. — P. 2307–2313.
- [6] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — М.: Наука, 1978. — 278 с.
- [7] Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 898 p.
- [8] Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 6. — С. 1270–1281.
- [9] Васильев, А.Ф. О произведениях $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 1. — С. 59–67.
- [10] Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. — 1961. — Vol. 12, № 2. — P. 90–93.
- [11] Wielandt, H. Über Produkte von nilpotenten Gruppen. III / H. Wielandt // J. Math. — 1958. — Bd. 2, № 4B. — S. 611–618.
- [12] Heineken, H. Product of finite nilpotent groups / H. Heineken // Math. Ann. — 1990. — 287. — P. 643–652.
- [13] Pennington, E.A. Trifactorisable groups / E.A. Pennington // Bull. Austral. Math. Soc. — 1973. — Vol. 8, № 3. — P. 461–469.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Предварительные результаты	3
2. Свойства пермутизаторов подгрупп	6
3. Критерии w -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп	9
Литература	14

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Научное издание

Васильев Александр Федорович,
Васильев Владимир Александрович,
Васильева Татьяна Ивановна

**О ПЕРМУТИЗАТОРАХ ПОДГРУПП
В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ**

Препринт № 1

В авторской редакции

Подписано в печать 03.05.2013. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 0,93.

Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 25 экз. Заказ 360.

1525-00

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».

ЛИИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.

Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.