

В. Ю. Медведева, Е. А. Ровба
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $\sqrt{1-x^2}$ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

Целью работы является получение асимптотической оценки для приближения функции $\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$ частичными суммами ряда Фурье по многочленам Чебышева второго рода.

Пусть

$$\hat{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

– ортонормированные многочлены Чебышева второго рода [1].

Запишем ряд Фурье для функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$:

$$\sqrt{1-x^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{U}_n(x),$$

где $a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 f(t) \sin[(n+1) \arccos t] dt$, $n = 0, 1, \dots$ – коэффициенты Фурье.

Найдём

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\pi - 1}{n+1} \right), n \in \mathbb{N}, a_0 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}. \text{ Тогда}$$

по теореме [1, с. 111] справедливо равенство

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2} (4n^2 - 1)}, x \in (-1; 1).$$

Оценим взвешенное равномерное приближение функции $f(x)$ частичными суммами полученного ряда Фурье. Пусть

$$\varepsilon_n(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot |f(x) - S_n(x)|, n = 0, 1, \dots, \text{ где } S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \hat{U}_k(x).$$

Теорема. Для приближений функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$ частичными суммами ряда Фурье справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \max_{x \in [-1; 1]} \varepsilon_n(x) = \frac{2}{\pi}, \text{ причём } \varepsilon_n(x) \leq \frac{2}{\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

Литература

- 1 Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены. / П. К. Суетин. – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.