

В. И. Поливко, К. А. Смотрицкий
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Различные системы ортогональных функций играют важнейшую роль в теории приближений. В настоящее время активно развивается теория рациональной аппроксимации. Поэтому проблема построения рациональных ортогональных систем функций является достаточно актуальной.

В случае приближения полиномами важнейшую роль играют многочлены Чебышёва первого и второго рода [1]. В рациональном случае одним из их обобщения являются косинус и синус дроби Чебышёва – Маркова [2]. Однако, в отличие от классических полиномов Чебышёва они не обладают свойством ортогональности.

В настоящей работе показывается, что возможно подобрать весовую функцию таким образом, чтобы синус дроби Чебышёва – Маркова уже бы образовывали ортогональную систему.

Пусть $a \in [0,1)$. Для $n = 0,1,2, \dots$ рассмотрим следующие функции

$$N_n(x) = \sin \left[(n+1) \arccos \frac{x+a}{1+ax} \right] \frac{1+ax}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-a^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Теорема. Система рациональных синус дробей Чебышева – Маркова $\{N_n(x)\}$, является ортогональной на отрезке $[-1,1]$ с весом

$$h(a, x) = \frac{\sqrt{1-x^2} (1-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+ax)^3}, \quad x \in [-1; 1]$$

в смысле

$$I_{nm} = \int_{-1}^1 N_n(x) N_m(x) h(x, a) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что если $a = 0$, то $N_n(x)$ представляют собой многочлены Чебышёва второго рода, а $h(0, x) = h(x) = \sqrt{1-x^2}$ – соответствующий чебышёвский вес.

Литература

1 Суэтин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суэтин. – М. : Физматлит. 2005. – 480 с.

2 Марков А. А. Избранные труды / А. А. Марков. – М. : Гостехиздат. 1948. – 412 с.