

Н. А. Шейко, Е. А. Ровба
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Поиск точных методов представления сложных функций, полиномами либо другими более простыми функциями, играет немаловажную роль в математике, так как, найдя такое приближение, мы можем изучать свойства и поведение функций, работая не с ними непосредственно, а с их приближением.

Конкретная оценка приближения всегда вызывала интерес у математиков. Первым наиболее ярким и значимым выводом в этом направлении является вывод С.Н.Бернштейна о приближении функции $|x|$ алгебраическими полиномами на отрезке $[-1;1]$.

В моей работе я нахожу ряд Фурье-Чебышева для функции $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [-1; 0] \\ ax, x \in [0; 1] \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$, а так же оцениваю приближение его частичными суммами. Таким образом $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n \overline{T(x)}_n$, где C_n -коэффициенты Фурье, а $\overline{T(x)}_n$ -ортогональный многочлен Чебышева 1-го рода.

В ходе расчётов получаем что коэффициенты Фурье равны: $C_m = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a(-1)^m}{4m^2-1}$ $k=2m$, $C_0 = a\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ и $C_1 = a\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. В итоге ряд Фурье-Чебышева для моей функции имеет вид:

$$a\frac{1}{\pi} + \frac{ax}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a(-1)^m}{4m^2-1} \cos 2m \arccos x$$

Далее произведя оценку приближения получаем, что

$$\varepsilon = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - S_n(x)| = \frac{2a}{\pi} \sum_{m=[n/2]+1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}$$

После чего произведя преобразования и перейдя к пределу получаем, что $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - S_n(x)| = \frac{2a}{\pi} \frac{1}{2[n/2]+1}$, и поднеся в предел получаем значение

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - S_n(x)| = \frac{2a}{\pi}$, что является точным значением данного приближения.

Материалы XX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях», Гомель, 20–22 марта 2017 г.

Литература

- 1 Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 199 с.
- 2 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2005. – 684 с.