А. В. Дашук, А. В. Лубочкин
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

ДЕМПФИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАЯТНИКА ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНО-НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим нелинейную модель математического маятника:

$$\ddot{x} + \sin x = u, \quad z(0) = (x(0), \dot{x}(0)) = z_0 = (x_{10}, x_{20}). \tag{1}$$

Устойчивыми состояниями равновесия системы (1) при $u = u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, на фазовой плоскости $z = (x, \dot{x})$ являются точки

$$z^k = (x = 2k\pi, \dot{x} = 0), \; k \in Z. \tag{2}$$

Традиционно при малых начальных отклонениях $|x_{10}| + |x_{20}|$ для гашения колебаний маятника около устойчивого нижнего состояния равновесия $(0, 0)$ используют линейное уравнение $\ddot{x} + x = u$. Но если начальное состояние значительно удалено от $(0, 0)$, то с помощью такой линеаризации решить эту задачу часто просто невозможно. Здесь для исследования поведения нелинейной системы вводится ее кусочно-линейная аппроксимация, что позволяет решать задачу демпфирования для любых начальных возмущений и движений маятника.

Обратную связь $u = u(z) = u(x, \dot{x})$, $z \in R^2$, назовем ограниченной дискретной демпфирующей в области $G \subset R^2$ для состояния равновесия (2), если: 1) $u(z^k) = 0$; 2) $|u(z)| \leq L$, $z \in G$; 3) траектория замкнутой системы (1): $\ddot{x} + \sin x = u(z)$, $z(0) = z_0 \in G$, представляет собой непрерывное решение уравнения (1) с управлением $u(t) = u(k\nu)$, $t \in [k\nu, (k+1)\nu]$, $k = 0, 1, \dots$; 4) решение $x(t) = 2k\pi$, $t \geq 0$, замкнутой системы асимптотически устойчиво, и G – область притяжения состояния равновесия $x = 2k\pi$.

Для построения определенной выше обратной связи используется реализация в режиме реального времени позиционного решения следующей кусочно-линейно-негладкой задачи

$$B_\theta(z) = \min \int_0^\theta |u(t)|\, dt, \; \ddot{x} + f(x) = u, \; (x(0), \dot{x}(0)) = z, \tag{3}$$
$$(x(\theta), \dot{x}(\theta)) = z^k, \; |u(t)| \leq L, \; t \in [0, \theta],$$

$f(x) = x - 2k\pi$, $x \in [-\pi/2 + 2k\pi, \; \pi/2 + 2k\pi]$, $f(x) = -x + (2k+1)\pi$, $x \in [\pi/2 + 2k\pi, \; 3\pi/2 + 2k\pi]$, $k \in Z$. При этом минимум в задаче (3) берется дополнительно и по моментам переключения функции кусочно-линейной аппроксимации с одного линейного участка на другой.

Построенные демпферы программно реализованы, просчитаны тестовые примеры.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ